# مبادئ الإحصاء الاقتصادي

دكتور
رياض السيد أحمد عمارة
أستاذ الاقتصاد الزراعي المساعد
كلية الزراعة - جامعة القاهرة



١٩٩٠

" بسم الله الرحمن الرحيم "

" أما الزبد فيذهب جفـــــاء

وأما ما ينفع الناس فيمكث فى الأرض " .

" صدق الله العظيم "

# تقديـــــــم

أقدم للقارىء هذا الكتاب فى مبادىء الاحصاء الاقتصادى آملا أن أكون قد وفقت فى جمع جزءا معنويا من المادة العلمية ، وأحسنت ترتيبها وصياغتها لطلاب مرحلة البكالوريوس . فقد استغرق كتابة هذا الكتاب نحو ٣ سنوات منفصلة . ولكى أتأكد من امكانية فهم المحاضرات لطلاب كلية الزراعة ، فقد درست محتويات هذا الكتاب بجامعة القاهرة ، والأسكندرية ، وصنعاء بالجمهورية العربية اليمنية فى الفترة من ١٩٨٢ ـ ١٩٨٦ . وهى محاولة أتمنى من الله أن تكون موفقة ، ومازال باب النقد مفتوح وخاصة البناء منه ، وأيضا الاجتهاد لجيلنا مازال مرغوبا ومأمولا . فالعلم أمانة وعلينا أن نورثه للأجيال بشتى الطرق .

ولا يسعنى أن أتقدم بجزيل عرفانى وشكرى لكل من ساهم فى طباعة هذه المحاضرات ، والله ولى التوفيق .

دكتـــور
رياض السيد أحمد عمارة

نوفمبر ١٩٩٠

# فهرست

صفحـــة

# البـــاب الأول

## بعض المفاهيم الاحصائية

### ١-١ مقدمـــــــه

كلمة احصاء كلمة قديمة - وأبسط ما نشير اليه مجموعة من البيانات الاحصائية عن ظاهرة ما . وقد تطور هذا المعنى منـــذ العشرينات من هذا القرن ، وتنوع وتعدد مدلول هذه الكلمه ليشمل أساليب القياس والتقدير الاحصائى ، والنظرية الاحصائية ، والاحصـاء الرياضى .... الخ . وقد امتد هذا التطور بعد اختراع الحاسب الآلى ليشمل العديد من النماذج المعقدة والتى استخدمت فى حل مشاكـل معينة .

وليس هناك فصل واضح بين وجود مجموعة من البيانات ، وبين البحث عن طرق معينة لاستنباط نتائج محددة منها ، بل أن كلاهما يكمل الآخر . وغالبا لا يقتصر الأمر على مجرد جمع مجموعة مـن البيانات وتحليلها احصائيا - بل أبعد من ذلك ، فأن المعالـــم المقدرة من هذه البيانات تخضع لبعض الاختيارات اللازمة لتأكيـــد مدلولها ، كما أنها يجب أن تتضمن المعلومات الأساسية فـــى البيانات ، ويجب أيضا أن تتسق النتائج مع الواقع .

وقد تطور استخدام الاحصاء بتطور فروع العلم الأخرى ، والحاجة الى اجابة على أسئلة لمشاكل ملحة . وبذلك فقد ظهرت فـــروع متميزة لعلم الاحصاء منها الاحصاء الرياضى ، والاحصاء السكانـــى ، والاحصاء البيولوجى ، وتصميم وتحليل التجارب الاحصائية ، والاقتصاد القياسى ، وطرق المعاينه .... الخ .

وللاحصاء كأى علم العديد من الرواد نذكر منهم شارلـــــز

داروين ( Charles Darwin ) ، والذى تبلورت أعماله خلال الفترة من ١٨٠٩ ـ ١٨٨٢ ، وكارل بيرسون ( Karl Pearson ) والذى ظهرت اعماله خلال الفترة من ١٨٥٧ ـ ١٩٣٦ ، وهو مؤسس المجلة العلمية Biometrika ـ وتلى كارل بيرسون تلميـــــذة ( W.S. Gosset ) ، والذى ظهرت أعماله خلال الفترة من ١٨٧٦ـ ١٩٣٧ ـ وقد أسس تحليل التباين ، واشتهر بأسم Student ـ وسوف تتناول مؤخرا واحدا من أهم التوزيعات الاحصائية المعروف باسم Student t-ratio ٠ وقد أضاف ( R.A. Fisher ) خلال الفترة ١٨٩٠ ـ ١٩٦٢ الى الاحصاء العديد خاصة فى مجـالات الزراعة ، والبيولوجى ، والوراثة ٠ وقد ألف ( Wald ) خـــلال الفترة من ١٩٠٢ ـ ١٩٥٠ كتابين فى التحليل التتابعى ، ودالــــة القرارات الاحصائية ٠ أيضا فهناك العديد من العلماء المعاصريـــن مثل Kendal, Snedecor, Yates ، وآخرون ٠

## ١ـ٢ : المفاهيم الاحصائية

فى البداية يوضح الجدول رقم (١) بعض الرموز الاحصائية التـى سوف تستخدم على مدى هذا المقرر ٠

جدول رقم (١) : الرموز والاختصارات الأساسية

| المعنى باللغة العربية | المعنى باللغة الانجليزية | الرمـــز |
|---|---|---|
| متغير | Variable | V. |
| عينـــة | Sample | S. |
| عينة عشوائية | Random Sample | r.s. |
| متغير عشوائى | Random Variable | r.v. |
| حجم العينة | Sample Size | n |
| حجم المجتمع | Population Size | N |

**تابع جدول رقم (١)**

| الرمز | المعنى باللغة الانجليزية | المعنى باللغة العربية |
|---|---|---|
| $\bar{X}$ | Sample Mean | متوسط العينة |
| $\sum_{i=1}^{n}$ | Sum of 1,2....n | مجموع من ١،٢،...،ن |
| U | Population Mean | متوسط المجتمع |
| $\sigma$ | Population Standard Deviation | الانحراف القياسى للمجتمع |
| $\rho$ | Population Correlation Coefficient | معامل ارتباط المجتمع |
| Var(X) | Variance X | تباين x |
| $\hat{Var}(X) = \hat{V}(X) = \hat{\sigma}_x^2$ | Estimated Variance of | تباين x المقدر |
| Cov (x,y) | Covariance of X & Y | شبية التباين لـ Y و X |
| $\hat{Cov}(X,Y)$ | Estimated Covariance of X & Y | شبية التباين المقدر لـ X,Y |
| $S^2$ | Sample Variance | تباين العينة |
| r | Sample Correlation Coefficient | معامل الارتباط المقدر من العينة |
| $R^2$ | Coefficient of Determination . | معامل التحديد |
| R | Multiple Correlation Coefficient | معامل الارتباط المتعدد |
| $S^2p$ | Pooled Variance | التباين التجميعى |
| SS | Total Sum of Squares | مجموع المربعات الكلى |
| Xi | i th Observation | الملاحظة رقم i |
| E(X) | Expected Value of X | القيمة المتوقعة لـ x |
| P (A) | Probability of Event A | احتمال حدوث الحدث A |

**تابع جدول رقم (١)**

| المعنى باللغة العربية | المعنى باللغة الانجليزية | الرمز |
|---|---|---|
| احتمال حدوث A بشرط حدوث B . | Conditional Probability of A Given B | P(A/B) |
| معامل الانحدار المقدر | Estimated Partial (Simple) Regression Coefficient | $\hat{B}$ |
| فرض العدم | Null Hgpothesis | $H_0$ |
| الفرض البديل | Alternative Hypothesis | $H_a$ |
| لا يســـــاوى | Not Equal to | $\neq$ |
| أكبر من | Greater Than | $>$ |
| أقل من | Less Than | $<$ |
| أكبر من أو يساوى | Greater Than or Egual to | $\geq$ |
| أقل من أو يساوى | Less Than or Egual to | $\leq$ |
| القيمة المطلقة | Absoluate Value | $\| \|$ |
| التوزيع الطبيعى القياسى | Stndard Normal Dist. | STN = Z |
| نسبة ـ ت | t-Ratio | t-Ratio |
| توزيع مربع كاى | Chi- Square Dist. | $\chi^2$ |
| توزيع F أو نسبة ف | F - Distribution or F- Ratio | F |
| نظرية الحدود المركزية | Central Limit Theorem | CLT |

وفيما يتعلق بالمفاهيم الأساسية فى الاحصاء - فسوف نولــــى شرحا مبسطا لأهمها وهى :

**١-٢-١- المتغير : ( V. ) Variable :** المتغير هو الصفــة القابلة للتغيير أو التباين . وقد يأخذ المتغير قيما كسرية بيـن $\infty$ و $\infty$ - ويسمى متغيرا متصلا Continuous ، وقـد لا يأخذ قيما بأقل من الوحدة ويسمى Discrete - وقد يعبـــر المتغير عن صفة كمية Quantitative كالوزن ، والطــول ، والدخل للفرد ..... الخ . وقد يعبر عن صفة وصفية Qualitative كالجنـــس ، واللون ، والذكاء ، وحالة الجو .... الـــخ ، ولا تختلف طبيعة المتغير العشوائى ( r.v. ) أو متغير الصدفة عن طبيعة المتغيرات كما سبق الاشارة . .ولم تعد المتغيـــرات الوصفية تحتل مشكلة فى التحليل كما كان سابقا ، حيث تطـــور استخدام ما يسمى بالمتغيرات الصورية Dummy Variables ، بالاضافة الى الاساليب الأخرى .

**١-٢-٢ المجتمع والعينة : Population and Sample**

المجتمع Population يتكون من كل القيم الممكنة لمتغيـــر . وقد يكون المجتمع محدد المفردات Finite أو غير محـــدد Infinite . وأيضا قد يكون المجتمع محددا فى اطار الحصر أو العد Countably Finite ومثال ذلك عدد الطلاب فى جامعة ما . وقد يكون محددا ولكن ليس فى اطار الحصر أو العد كعـدد كيزان الذرة فى هكتارين من الأرض مثلا . أما المجتمع الغير محدد فيصعب حصره غالبا - ومثال ذلك النجوم والأسماك فى البحـــار وغيرهما .

والعينة Sample هى بصفة عامة Sub-Groub أو جزء من

من المفروض أن يكون ممثلا للمجتمع . والمعاينة لها طرقها ، وهى وسيلة لتقدير معالم المجتمع والتى يصعب استقرائها . والعينة من المفروض أن تعكس كل المعلومات عن المجتمع الذى سحبت منه . ويتحدد حجم العينة Sample Size بظروف البحث الذى صُممت من أجله - لكن يجب أن يكون حجم العينة كافيا للحصول على معلومات جيدة من تقديراتها . وفى بعض الأحيان قد تكون العينة هى كل المجتمع . وينحصر الغرض من المعاينة فى الحصول على تقديرات غير متحيزة ومتسقة وكافية لمعالم المجتمع . أيضا فنتائج العينة بصفة عامة يجب أن تؤخذ بحذر ، خاصة عند التعميم من العينة الى المجتمع ككل ، كما أن اختيار الباحث للعينة يجب أن يتسم بالدقة ، وخاصة فى مراحل اختيار العينة وجمع البيانات ، والا فستكون المعاينة أسلوبا مضللا ولا يمكن الاعتماد عليه . ولسنا هنا بصدد شرح طرق المعاينة ، ولكن سنعرض لبعض منها كأمثلة على أن نناقش فى جزء آخر من هذا المقرر . فالعينة العشوائية (r . s.) Random Samle[1] هى تلك العينة التى تؤخذ من مجتمع ما بحيث أن يكون لكل مفردة من مفرداته نفس فرصة الظهور فى العينة[٢] . ولسحب العينة العشوائية بطريقة سليمة ، يمكن الاستعانة بجداول الأرقام العشوائية أو دليل التليفون ، كما سيتم شرحة فى المحاضرات العملية لهذا المقرر. وجدير بالملاحظة أن نشير هنا فقط الى طريقة السحب ، فهناك السحب باحلال With Replacement والسحب بدون احلال Without Replacement - وكما تعنى الكلمات فالسحب باحلال ، يتم بسحب المفردة $X_i$ ثم اعادتها للسحب مرة أخرى أما السحب بدون احلال Without R. فبمجرد سحب المفردة $X_i$

---

(١) العينة العشوائية تكون من مجموعة من المفردات المستقلة والمتماثلة من حيث التوزيع ( iid's ) من مجتمع محدد.

(٢) أى أن احتمال سحب أى مفردة من المجتمع هو ( $\frac{1}{N}$ ).

فأنه لا يتم ارجاعها للسحب مرة أخرى . وبديهيا سيختلف احتمال سحب أي مفردة فى كلا الحالتين . وسوف نذكر مثالا لذلك فى الجزء الخاص بالاحتمالات فى هذا المقرر . كذلك فتكاليف الحصول على العينة فى كلا الحالتين مختلفة . وبذلك يصبح الأمر مفاضلة بين تكاليف المعاينة وكفاءة المعاينة . كما سوف نناقشه فيما بعد .

أما فى حالة ما اذا كان هناك سحب لعينة تعكس اختلافات معينة فى المجتمع ، فيمكن أخذ عينة عشوائية طبقية ، حيث يتم سحب عينة تتكون من كل الطبقات بنفس نسبة تمثيل هذه الطبقات فى المجتمع . وهنا يجب الاشارة أن العينة تؤخذ عشوائيا من كل طبقة على حده ، بحيث يتناسب العدد المسحوب من كل طبقة من نسبة تمثيل تلك الطبقة فى المجتمع .

وقد يكون الغرض هو سحب عينات لدراسة صفات معينة ، ولكن لا يتم السحب بطريقة غير متميزة - بذلك تصبح العينة متميزة وقد يكون الغرض أن تعكس العينة اختلافات معينة موجودة فى المجتمع - ولسنا بصدد عرض نماذج لهذه العينات ، حيث يتم دراستها فى مقررات خاصة بذلك .

**١-٢-٣ المعلمة : Parameter** : ويرمز لها بصفة عامة بالرمز $\theta$ . حيث أن $\theta$ تتكون من قيم تصف هذا المجتمع . فمن معالم مجتمع ما المتوسط $\mu$ ، والتباين $\sigma^2$ .

**١-٢-٤ الاحصائية : Statistic** : وهى بصفة عامة تقديرات العينة لمعالم المجتمع . فمثلا متوسط العينة $\bar{X}$ هو تقدير غير متميز للمعلمة $\mu$ وهى متوسط المجتمع . وكذلك $S^2$ هو

تقدير $\sigma^2$ . وتقديرات العينة لمعالم المجتمع يجب أن تكون غير متميزة ومتسقة وكافية . حيث أن الغرض الأساسي من المعاينة هو الحصول على تقديرات لمعالم المجتمع التي يصعب معرفتها . والمعالم المقدرة تختلف من عينة لأخرى .

## ١-٣- جمع البيانات الاحصائية

بصفة عامة ، هناك عدة طرق لجمع البيانات الاحصائية ، فأبسط وأهم هذه الطرق ، هو جمع البيانات الأولية من تجارب معينه . كما هو الحال في التجارب المعملية والحقلية وغيرها . حيث يقوم الباحث بتصميم التجربة ، وجمع البيانات الناتجة . والتجربة بصفة عامة تتسم بالتحكم في الظروف المحيطة . وبالتالي فأن الباحث يستطيع عن طريق التجربة الحصول عن بيانات محددة .

وفي بعض الأحيان يقوم الباحث بجمع بيانات أولية في وقت محدد عن قطاع محدد السكان ، أو منطقة محددة ، أو عن علاقات الانتاج ، أو خلاف ذلك وتسمى هذه البيانات بالبيانات القطاعية - وللحصول على هذه البيانات يقوم الباحث بتصميم استمارة استبيان Questionnaire تتضمن الأسئلة الأساسية التي يريد اجابات قاطعة عليها . ولهذه الاستمارة مواصفات محددة . فيجب أن تكون أسئلتها واضحة وعلى مستوى الفرد الواقع في اطار المعاينة ، كذلك فيجب أن تحتوى على أسئلة تؤكد اجابات أسئلة أخرى - كذلك يجب أن يتسم الأفراد القائمين على جمع البيانات بالموضوعية والدقة . ويمكن جمع هذه الاستمارات مباشرة ، أو ارسالها في البريد ، أو نشرها في الصحف أو خلافه . والبيانات التي يتم جمعها عن طريق استمارات الاستبيان مقبولة ومرضية اذا ما تم مراعاة الدقة في اعداد الاستمارة من ناحية ، وتم جمعها بطريقة دقيقة من ناحية أخرى .

وقد تكون البيانات التى يعتمد عليها الباحث هى من قبيل البيانات التاريخية Time Series والتى يتم جمعها من السجلات الحكومية لبيانات السكان والدخل والناتج والرقعة المزروعة بمحصول ما فى العشرة سنوات الماضية مثلا . وهذه البيانات بصفة عامة تعتبر أقل دقة من البيانات التى يقوم الباحث بجمعها بنفسه - وغالبا يعتمد الكثيرين من الباحثين على مايسمى Pooled Data Set حيث يقوم بجمع جزء من البيانات من دراسة قطاعية ويدمجها مع بيانات تاريخية بما يتسق مع التقديرات المطلوب الحصول عليها ، وبذلك تكون التقديرات هى أيضا Pooled Estimations وتحتاج الى التفسير بحذر. أيضا فقد يعتمد الباحث على الدوريات والمجلات العلمية والنشرات والأبحاث السابقة كمصدر للبيانات ، لكن عليه أن يعتمد على الموثوق منها كمصدر للمعلومات . وبصفة عامة فالبيانات بعد جمعها تحتاج الى عمليات تبويب كما سيتم عرضه فى الجزء القادم بيد أن هذه العمليات تحتاج الى دقة فى عمليات التسجيل أيضا .

# الباب الثانـــى

## عرض البيانات الاحصائية

**يتم عرض البيانات الاحصائية فى عدة صور منها :**

**أ - الجداول :** ففى حالة وضع البيانات فى جداول يجب مراعاة أن يكون للجدول عنوانا مميزا . وذلك بوضع أرقام محددة مميزة - كرقم الجزء الذى يقع فيه الجدول - مثال ذلك جدول رقم (١)، ليدل على الجدول الأول - واذا أردنا تمييز الجزء الذى يقع فيـــه الجدول يكتب جدول رقم ( ١ - ١ ) أو ( ١ - ٢ ) مثلا ، وذلـك لتمييز الجداول وتسهيل الرجوع اليها عند الضرورة - كذلك فلابـد من تحديد تاريخ أو الفترة التى جمعت فيها هذه البيانـــات، ووحدات القياس ، ومصدر البيانات فى الجدول . وكذلك فيجـب ترتيب الملاحظات أسفل الجدول طبقا لما تشير اليه فى صلـب الجدول . أيضا فمن الأفضـــل أن توضح البيانات فى صورة سهلة مقروءه وليست عرضه للخطأ أو اللبس - وذلك عند طريـق تقـ - الأرقام ووضعها فى صورة سهلة . انظر جدول رقم (٢) .

**جدول رقم (٢) : بيانات تقديرية عن انتاج وانتاجية محصول الأرز فى بلد ما ، خلال الفترة ٧٣ - ١٩٨٥ .**

| البيان / السنوات | الرقعة المزروعة (بالألف فدان) | الانتاجية بالطـن | الانتـاج بالألف طن |
|---|---|---|---|
| ١٩٧٣ | ١١٢٢ | ٢,٠٠ | ٢٢٤٤ |
| ١٩٧٤ | ١٣٥٠ | ٢,١٠ | ٢٨٣٥ |
| ١٩٧٥ | ١٣٢٠ | ٢,٠٠ | ٢٦٤٠ |
| ١٩٧٦ | ١٣٤٠ | ٢,٠٥ | ٢٧٤٧ |

تابع جدول رقم (٢)

| البيان / السنوات | الرقعة المزروعة ( بالألف فدان) | الانتاجية بالطن | الانتاج بالألف طن |
|---|---|---|---|
| ١٩٧٧ | ١٢٠٠ | ٢,١٥ | ٢٤٨٠ |
| ١٩٧٨ | ١٦٠٠ | ٢,٢٠ | ٣٥٢٠ |
| ١٩٧٩ | ١٤٠٠ | ٢,٦٠ | ٣٦٤٠ |
| ١٩٨٠ | ١٤٥٠ | ٢,٥٥ | ٣٥٠٣ * |
| ١٩٨١ | ١١٠٠ | ٢,٥٢ | ٢٧٧٢ |
| ١٩٨٢ | ١٢٠٠ | ٢,٥٦ | ٣٠٧٢ |
| ١٩٨٣ | ١٣٠٠ | ٢,٤٠ | ٣١٢٠ |
| ١٩٨٤ | ١٤٠٠ | ٢,٤٥ | ٣٤٣٠ |
| ١٩٨٥ | ١٤٠٠ | ٢,٥٥ | ٣٥٧٠ |

(*) ملاحظة : تم التقريب لأقرب ألف طن (أو لأقرب ألف وحدة ).

المصدر : جمعت وحسبت من البيانات المنشورة ، ويكتب المصدر.

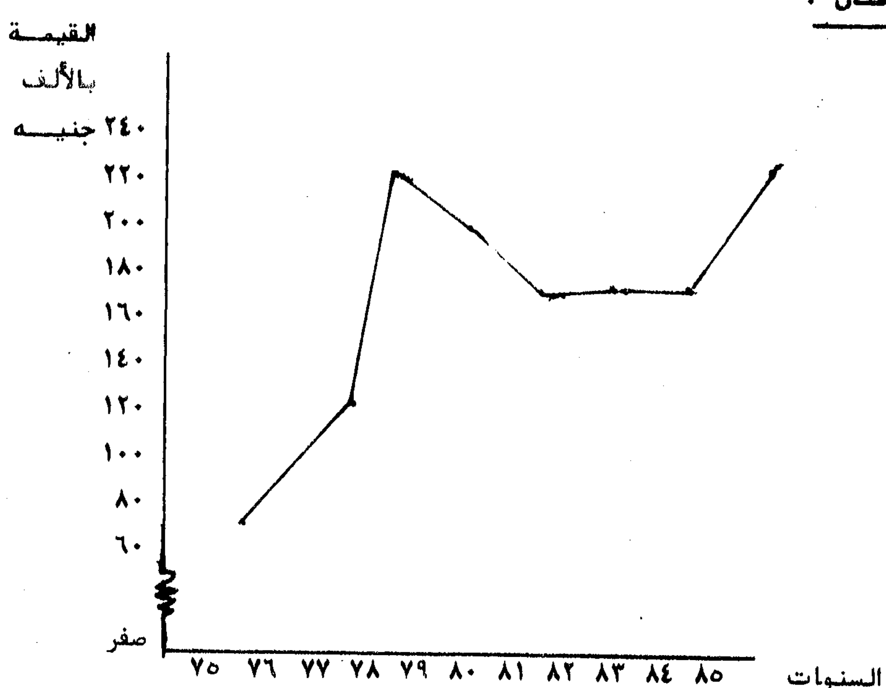
فى هذه الحالة المصدر : بيانات تقديرية عن انتاجية وانتاج محصول الأرز خلال الفترة ٧٣ - ١٩٨٥ .

ب - العرض البيانى : قد يكون العرض الجدولى فى كثير من الاحيان غير مناسب للغرض الذى ننشده . فالعرض البيانى ، قد يكون سهلا للفهم والاستيعاب السريع لمضمون البيانات . ويجب أن يتم توقيع البيانات الأساسية على المحورين بدقة كاملة ، وأن يتم توقيع النقاط الأساسية بين المحورين بطريقة واضحة . ومن أمثلة العرض البيانى

١- الخط البيانى : Line Chart : غالبا مايمكن

رسم الخط البيانى من نقطتين على الأقل ، وذلك للمتغيرات ذات الطبيعة المتصلة فقط ( يأخذ المتغير فيما بين ∞ ، ∞ - )

**مثال :**




شكل رقم (١) : القيمة التقديرية للانتاج الحيوانى بالألف جنيه خلال الفترة ٧٥ - ١٩٨٥ .

المصدر : بيانات تقديرية .

هذا ويمكن رسم أكثر من خط أو أكثر على امحورين لتمثيل ظاهرة أو أكثر وذلك لأغراض المقارنة . وهذا يجب أن يشمل الرسم مفتاح للرسم لتوضيح الخطوط عن بعضها - ويمكن أستعمال خطوط متصلة ، وخطوط متقطعة وهكذا . ويجب أن يكون الشكل متسقا ولا يترك فراغ كبير ، ويمكن البدء من وحدات أكبر مع كسر

المحور كما هو بالشكل رقم (١) .

٢- **الرسوم اللوغاريتمية :** فى كثير من الاحيان يكون الاهتمام بدراسة التغير النسبى لمتغير ما . ويتم فى هذه الحالة يتم تقسيم المحورين بحيث تكون المسافات متساوية وليست الكميات كما هو الحال فى الخط البيانى العادى . هذا مع مراعاة التقسيم اللوغاريتمى يبدأ من الواحد ( لأن $Log\ 1 = 0$ ) . ونستخرج لوغاريتمات الأعداد من ١ - ١٠ لكلا المحورين . ويمكن تقسيم المحور الى دورة أخرى يأخذ لوغاريتمات الأعداد من ١ - ١٠٠وهكذا ويمكن أيضا تكبير الرسم لكى يكون مناسبا بضوب اللوغاريتمات فى أى عدد .

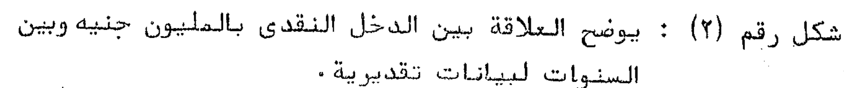
**الأشكال الهندسية :** من الأشكال الهندسية ما يلى :

١- **الأعمدة البيانية :** وذلك بتمثيل الظاهرة فى شكل أعمدة أو مستطيلات متساوية القاعدة ، ويناسب طولها - باعتبار مقياس الرسم - مع قيم الظاهرة التى تمثلها . وهذا الأسلوب يصلح للصفات الوصفية وكذلك أغراض المقارنة بين صفتين - ويمكن الاستعانة بعدة أشكال منها - كما سيتم توضيحة فى المحاضرات النظرية والعملية .

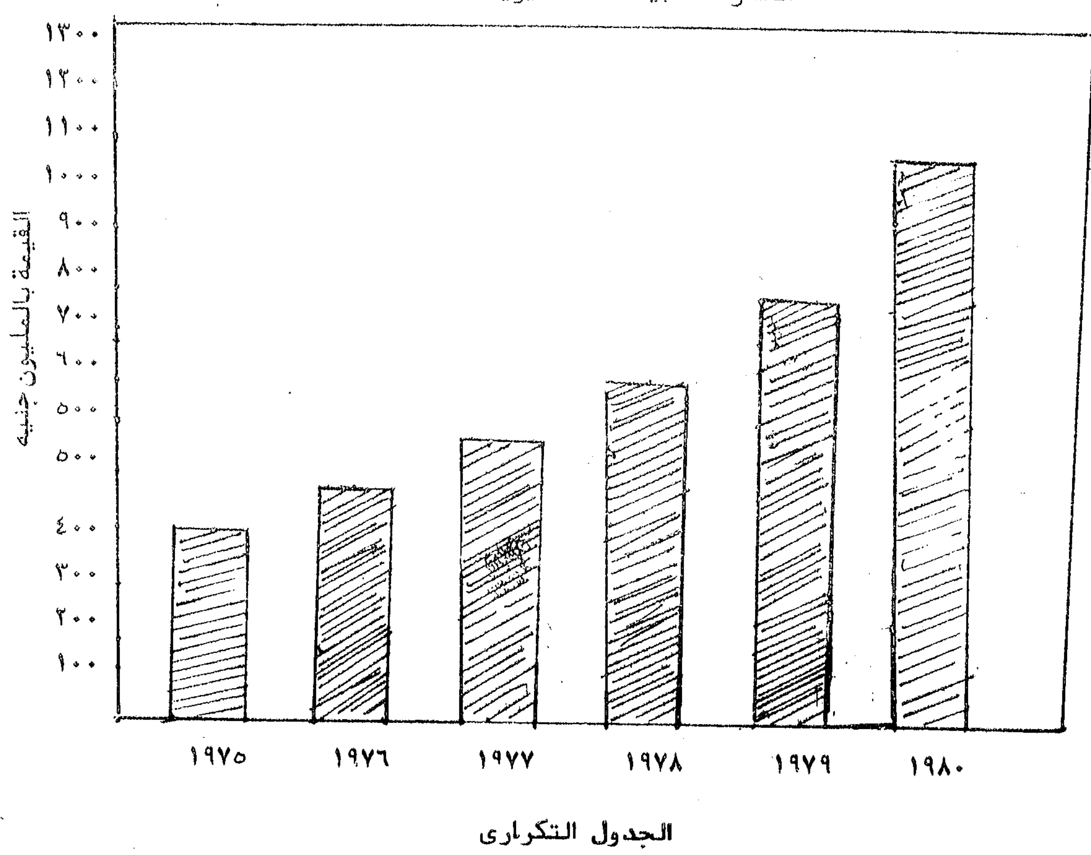
٢- **المساحات :** ومنها الدوائر والمربعات والمستطيلات التى يمكن استخدامها للتعبير عن ظواهر معينة .

أيضا فيمكن الأستعانة بصور مختلفة لتدل على دلالات معينة ، مثل صور الأشخاص لاحصائيات السكان وهكذا - ويقع هذا فى اطار العرض التصويرى .

**مثال :**



شكل رقم (٢) : يوضح العلاقة بين الدخل النقدى بالمليون جنيه وبين السنوات لبيانات تقديرية .




## الجدول التكرارى

قد تكون الظاهرة ممثلة فى شكل كم من البيانات يصعب استخدامها للتوصل الى نتائج محددة - وفى هذه الحالة قد يسهل تمثيل هذه البيانات فى شكل مرضى ، اذا ما أعيد تقسيم المدى Range بين أكبر قيمة وأقل قيمة الى فئات ، ثم يتم حساب التكرارات فى كل فئة .

**مثال :**

البيانات التالية تمثل درجات الطلاب فى امتحان مادة الاحصاء

٧٣ ٥٨ ٦٢ ٥٤ ٦٣ ٦٣ ٦٦ ٦٨
٥٧ ٦١ ٦٢ ٧٢ ٦٩ ٦٣ ٦٠ ٦٤
٥٥ ٦٥ ٦١ ٦٩ ٦٣ ٥٩ ٦٢ ٥٦
٦١ ٦٣ ٦٣ ٦٢ ٥٩ ٦٤ ٧٣ ٦٨
٦٤ ٦٠ ٦٥ ٥٩ ٦٢ ٦٨ ٥٨ ٧١
٦٥ ٦١ ٦٤ ٦٦ ٦٣ ٥٦ ٦٣ ٦٥
٥٨ ٦٥ .

ولتبسيط هذا الكم من البيانات ، يمكن الاستعانة بجدول توزيع تكرارى . وببساطة فأقل درجة هى ٥٤ ، وأعلى درجة هى ٧٣ـ فيكون المدى حوالى ١٩ درجة .

جدول رقم (٣) : جدول التوزيع التكرارى لدرجات الطلاب

| الفئات | العلامات | التكرارات |
|---|---|---|
| ٥٤ - | 𝍸 | ٥ |
| ٥٨ - | 𝍸 𝍸 𝍷𝍷 | ١٢ |
| ٦٢ - | 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍷𝍷 | ٢٢ |
| ٦٦ - | 𝍸 𝍷𝍷 | ٧ |
| ٧٠ - ٧٤ | 𝍷𝍷𝍷𝍷 | ٤ |
| المجموع | — | ٥٠ |

وبصفة عامة ، فاختبار الفئات وتحديد مدى الفئة يجب أن يتسم بالدقة . فلا تكون الفئة متسعة لتشمل جميع البيانات ، ولا تكون من الضيق بحيث تشمل عدد قليل من البيانات ، وقد تكون الفئات متساوية أولا وذلك يرجع الى طبيعة البيانات . وقد يقتضى الأمر أن تكون الفئة مفتوحة ، بيد أن هذا يزيد من مشقة الحساب والتمثيل البيانى . وبصفة عامة فهناك قاعدة تعرف بقاعدة ستيرجس Sturgse لتحديد عدد الفئات

$$F = 1 + 3.30 \ \ln . n$$

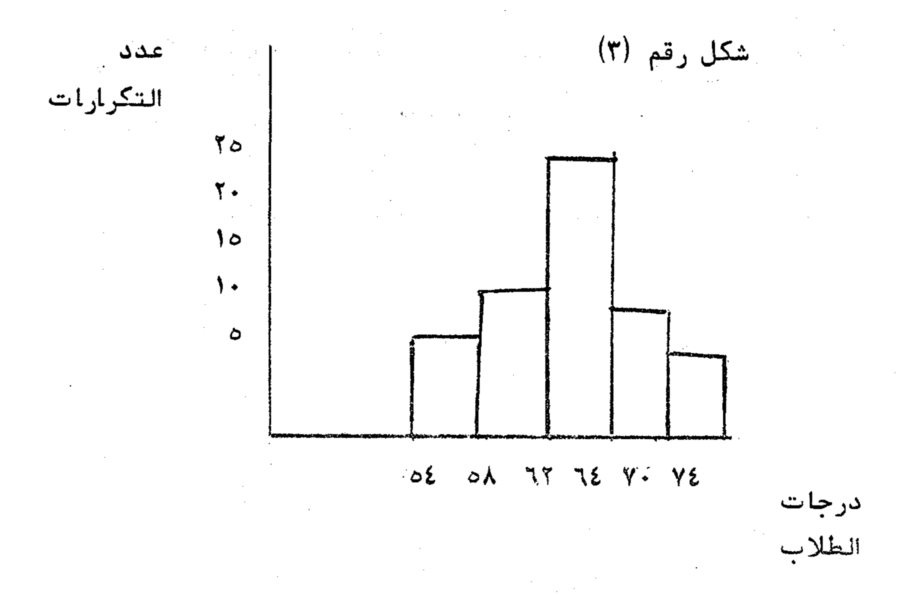
وفى الحقيقة يصعب استخدام هذه القاعدة اذا كان عدد المفردات بين حدى التطرف من الصغر والكبر ، فمثلا يصعب استخدامها اذا كان عدد المفردات أكبر من ١٠٠٠ مثلا . وبصفة عامة تعدد الفئات يتوقف على طبيعة البيانات ، ويستحسن أن يكون مدى الفئة متساويا وأن تكون فئات مميزة .

## العرض البيانى للجدول التكرارى

قد يكون العرض البيانى أكثر وضوحا وأسهل للتوصل الى مدلول البيانات ، ويتم عرض التوزيع التكرارى بثلاث طرق هى :

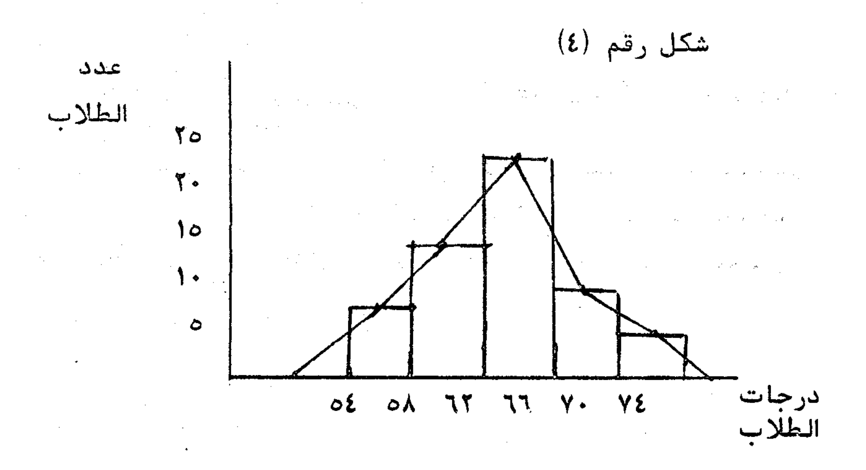
**١- المدرج التكرارى : Histogram** : ويتم بتقسيم المحور الافقى بطريقة تتسع الى مدى الفئة ، ثم يقام مستطيلات يتناسب ارتفاعها مع عدد المفردات الداخله ضمن كل فئة ، شكل رقم (٣) .

شكل رقم (٣)




٢- المضلع التكراري Frequency Polygon : وذلك بتحديد مراكز الفئات أو تنصيف الاضلاع العليا للمستطيلات في الشكل رقم (٣) وتوصيلها بخط منكسر .

شكل رقم (٤)



بافتراض مفردات العينة هى $X_1 , X_2 , X_3 , ........ X_n$

بذلك يكون انحراف المفـــــردة $i$ عن المتوسط هو $x_i = X_i - \bar{X}$

وبذلك يكون مجموع انحرافات $n$ من المفردات هو :

$$\sum x_i = \sum_{i=1}^{n} X_i - n\bar{X}$$

بذلك يكون $\sum x_i = \bar{X} - \bar{X}$ = صفر

أو أن :

$$\sum x_i = \sum_{i=1}^{n} X_i - n \left( \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i}{n} \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} X_i - \sum_{i=1}^{n} X_i$$ = صفر

ويمكن توضيح ذلك بمثالا رقميا ،

<u>مثال :</u>

المتوسط الحسابى للأرقام ٦ ، ٨ ، ٦ ، ٥ ، ٨ ، ٣ هو ٦

لان : $\bar{X} = \frac{\sum X_i}{n} = \frac{٣٦}{٦} = ٦$

ومجموع الانحرافات هو = ( صفر ) + (٢) + (صفر) + (-١) + (٢) + (-٣) = ٤ - ٤ = صفر ٠

وكذلك فمن صفات المتوسط الحسابى أن مجموع مربعات انحرافات المفردات عن متوسطها الحسابى أقل من مجموع مربع الانحـــرافات عن أى قيمة أخرى فى العينة ٠

٣ - باضافة أو طرح مقدارا ثابتا من قيم العينة ، فأن الوسط الحسابى الجديد يساوى الوسط الحسابى للقيم الأصلية مضافا اليها أو مطروحا منها - حسب العملية الحسابية طرح أو جمع - قيمة المقدار الثابت .

٤ - تسرى نفس الخاصة فى (٣) على حالة القسمه والضرب على أو فى ثابت .

٥ - يتأثر المتوسط الحسابى بكافة القيم الداخله فى حسابه .

٦ - اذا قسمنا مجموعة من قيم متغير ما الى مجموعات جزئية فأن الوسط الحسابى للمجموعة ككل يساوى المتوسط الحسابى المرجح بالأوزان لمتوسطات هذه المجموعات بشرط أن تكون الأوزان متناسبة مع عدد التكرارات فى كل مجموعة جزئية .

## عيوب المتوسط الحسابى :

١- يتأثر بالقيم الشاذة فى العينة ان وجدت .
٢- لا يمكن استعماله فى حالة الصفات الوصفية .
٣- تصبح قيمته غير متملة للبيانات اذا كان هناك التواء فى توزيع البيانات ، ويفضل عليه الوسيط والمنوال .

## المتوسط الحسابى المرجح : Weighted Arithmetic Mean

فى حالة تفاوت القيم من حيث أهميتها ، فأنه فى هذه الحالة يجب الترجيح بأوزان Weights تتناسب مع تلك الأهمية - وصفية المتوسط المحسوب بهذه الطريقة هى :

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (W_i \; X_i)}{\sum_{i=1}^{n} W_i}$$

**مثال :**

افترض أن صافى دخل المزارعين فى قرية ما يمكن تقسيمه الى ثلاث فئات هى ١٠٠ ، ٣٠٠ ، ٦٠٠ جنيه وأن نسب المزارعين الموجودين فى القرية هى ٦ : ٣ : ١ . بذلك يكون المتوسط الحسابى هو ٣٣٣,٣٠ جنيها وهذا غير صحيح . ولكن باستخدام المتوسط المرجح تصبح القيمة هى :

$$X = \frac{\sum_{i=1}^{n} W_i X_i}{\sum_{i=1}^{n} W_i}$$

$$= \frac{(١\times٦٠٠) + (٣\times٣٠٠) + (٦\times١٠٠)}{١ + ٣ + ٦} = \frac{٢١٠٠}{١٠} = ٢١٠$$

وهذا هو الصحيح فى هذه الحالة .

## ٣-٢- الوسط الهندسى

## The Geometric Mean

الوسط الهندسى هو الجذر النونى لحاصل ضرب مجموعة من القيم عددها ( n ) أى =

$$G = \sqrt[n]{X_1 \; X_2 \; X_3 \; \dots\dots\dots \; X_n} = (X_1 X_2 \dots X_n)^{1/n}$$

ويستخدم الوسط الحسابى فى حالة القيم النسبية الموجبة والغير صفرية مثل الأرقام القياسية وغيرها .

**مثال :** الوسط الهندسى للأرقام ٢ ، ٤ ، ٨ هو

$$G = \sqrt[3]{(2)\;(4)\;(8)} = \sqrt{64} = 4.$$

## ٣-٣- الوسط التوافقى

## The Harmonic Mean

الوسط التوافقى هو مقلوب الوسط الحسابى لمقلوبات القيم . فاذا كانت مجموعة من القيم هى $X_n$ ........ $X_2$ , $X_1$ ، فأن الوسط التوافقى H يساوى :

$$H = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n}(1/X_i)} \quad , \quad \frac{1}{H} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_i}\right)$$

فالوسط التوافقى للقيم ٤ ، ٢ ، ٣ هو

$$H = \frac{٣}{\frac{1}{٣}+\frac{1}{٢}+\frac{1}{٤}} = \frac{٣}{(\frac{١٣}{١٢})} = \frac{٣٦}{١٣} = ٢,٧٧$$

وهو نادر الاستخدام ، الا فى بعض الحالات التى تعبر فيها الأرقام عن معدلات موجبة .

## ٣-٤- الوسيط

## Median

هناك حالات يصعب استخدام المتوسط الحسابى فيها ، كأن يكون هناك قيما شاذة ، أو أن التوزيع به بعض الالتواء ، أو قد يكون الجدول التكرارى مفتوحا مثلا ، وفى هذه الحالات يمكن حساب الوسيط . والوسيط بصفة عامة هو متوسطا مكانيا - أى أن قيمته تتوسط مجموعة من القيم مرتبة ترتيبا تصاعديا أو تنازليا بذلك فموقع الوسيط فى حالة القيم الفردية العدد هو : $\frac{n+1}{2}$ وفى حالة القيم الزوجية العدد هو متوسط القيمتين المتوسطتين .

**مثال :** اذا كان لدينا مجموعة من القيم هى :

٤ ، ٥ ، ٦ ، (١٣) ، ٢٢ ، ٩٩ ، ١٠٠

فأن الوسيط هو القيمة التى ترتيبها هو $\frac{1}{2}(n+1)$ أى ١٣ .
واذا كانت القيم هى ٤ ، ٥ ، ٦ ، ١٣ ، ٢٢ ، ٩٩ .
فان الوسيط هو متوسط القيمتين $\frac{١}{٢}$ ( ٦ + ١٣ ) = ٩,٥ .

وفى حالة حساب الوسيط من جدول التوزيع التكرارى ، فـأن ترتيب الوسيط هو $\frac{١}{٢}$ مجموع التكرارات بغض النظر عما اذا كان عدد المفردات فرديا أو زوجيا . بعد ذلك نتبع الخطوات التالية لاستخراج قيمة الوسيط :

( أ ) تحدد الفئة الوسيطية بالاستعانة بالتوزيع التكرارى الصاعد أو الهابط .

( ب ) قيمة الوسيط تكون ممثلة لبداية الفئة التى يقع بداخلها ، مضافا اليها مقدارا من طول الفئة يتناسب مع بعد الوسيط عن بدايتها . وللسهولة يمكن حسابه من الصيغة التالية :

الوسيط = $\tilde{X}$ = الحد الأدنى للفئة الوسيطية +

( ترتيب الوسيط ـ التكرار المتجمع الصاعد السابق لفئة الوسيط / التكرار الأصلى لفئة الوسيط ) . طول الفئة

**مثال :** بالرجوع الى المثال الخاص بدرجات الطلاب فى مادة الاحصاء ص ٢١ يمكن حساب الوسيط كالآتى :

$$\tilde{X} = ٦٢ + \left( \frac{٢٥ - ١٧}{٢٢} \right) \times ٤ = ٦٢ + \frac{٣٢}{٢٢} = ٦٣,٤٥٤$$

وفى حالة استخدام التكرار المتجمع الهابط ، يكون الوسيط

$$\tilde{X} = ٦٢ + \left( \frac{٢٥ - ٣٣}{١١ - ٣٣} \right) (٤) = ٦٢ + \left( \frac{-٨}{-٢٢} \right) (٤)$$

$$= ٦٢ + \frac{٣٢}{٢٢} = ٦٣,٤٥٤$$ نفس النتيجة .

وفى حالة الرسم البيانى للتوزيعات التكرارية . فأنه اذا ما تم رسم المنحنين التكرارين الصاعد والهابط فى رسم واحد ، شكل رقم (٦) ص ٢٥ ، وبمقياس رسم واحد ، فالاحداثى الأفقى لنقطة تلاقى المنحنين يمثل الوسيط ، شكل رقم (٦) ص ٢٥ .

**خصائص الوسيط :**

١- لا تتأثر قيمته بالقيم الشاذة فى التوزيع .
٢- يمكن استخدام الوسيط فى حالة القيم الغير موزعة توزيعا معتدلا وفى حالة الجداول التكرارية المفتوحة .
٣- سهل الفهم والتقدير ، وهو بصفة عامة متوسطا مكانيا .

**عيوب الوسيط :**

١- ليس شائع الاستخدام .
٢- ليس حساسا للتغيرات التى تحدث فى قيم المفردات الداخله فى حسابه .

## ٣-٥ المنوال

## Mode

المنوال هو القيمة الأكثر تكرارا أو شيوعا .

**مثال :** بافتراض أن أطول بعض الطلاب بالسم هى :

١٢٢ ، ١٣٢ ، ١٥٠ ، ١٤٢ ، ١٥٠ ، ١٤٥ ، ١٥٠ ، ١٦٥ ،
١٥٠ ، ١٨٥ ، ١٤٠ ، ١٥٠ ، ١٥٥ .

فأن المنوال هو ١٥٠ سم .

وقد يوجد أكثر من منوال ضمن مجموعة من القيم . وقد لا تحتوى على منوال قط . وتختلف قيمة المنوال من عينة لأخرى

مسحوبة من نفس المجتمع ، وهذا على عكس المتوسط الحسابى .

ويمكن حساب المنوال من جدول التوزيع التكرارى تقريبا بنفس المعنى ، حيث أن الفئة المنوالية هى الفئة الأكثر تكرارا - ويمكن استخدام الصيغة التالية لحساب المنوال من جدول التوزيع التكرارى .

$$M = L_1 + \left( \frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2} \right) C$$

حيث أن :

$L_1$ = الحد الأدنى للفئة المنوالية

$\Delta_1$ = الفرق المطلق بين تكرار الفئة المنوالية والفئة السابقة لها .

$\Delta_2$ = الفرق المطلق بين تكرار الفئة المنوالية والفئة التالية لها .

$C$ = مدى الفئـــــة .

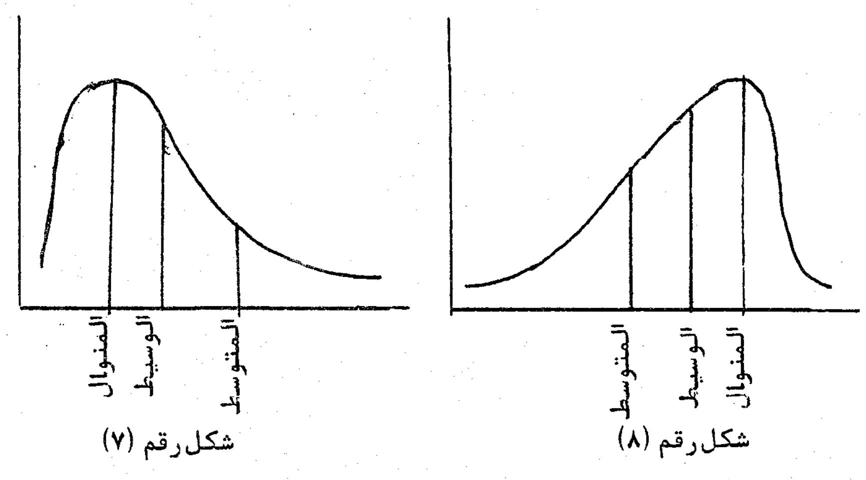
ويمكن تطبيق ذلك بحساب المنوال للمثال السابق شرحة فـــى ص ٢١ .

المنوال = $M$ = ٦٢ + ( $\frac{١٠}{١٠ + ١٥}$ ) × ٤ = ٦٢ + $\frac{٨}{٥}$ = ٦٣,٦٠

وبذلك نخلص بأنه فى حالة التوزيع المعتدل يكون الوسيـــط = المنوال = المتوسط الحسابى . وفى مثالنا السابق شرحة ص ٢١، فانه هذه القيم كانت ٦٣,٤٥ ، ٦٣,٦٠ ، ٦٢,٩٨ على الترتيب لقيـــم الوسيط والمنوال والمتوسط الحسابى . مما يؤكد أن التوزيع تقريبا معتدل . وقد توصل كارل بيرسون الى المعادلة التالية والتى تربـط بين المتوسطات الثلاث فى حالات التوزيعات الملتوية التواء بسيطا .

( المتوسط الحسابى - المنوال ) = ٣ ( المتوسط الحسابى - الوسيط)

وبذلك فمن هذه المتساوية ، يمكن حساب المتوسط الثالث ، اذا علمنا قيمة أى اثنين منهما . وبذلك يسهل حساب المتوسط الحسابى فى الحالات التى يصعب تقديره فيها . ويوضح الشكل رقم (٧) - والشكل رقم (٨) العلاقة بين هذه المتوسطات فى حالة التوزيعات الغير معتدلة .




شكل رقم (٧) شكل رقم (٨)

## مميزات المنوال :

١- من أوفق المقاييس المركزية - فضلا عن أنه أيضا متوسطا مكانيا
٢- سهل الحساب والتقدير ، ولا يتأثر بالقيم الشاذة .
٣- يمكن تقديره فى حالة القيم الملتوية التواء بسيطا أو فى حالة الجداول التكرارية المفتوحة .

## عيوب المنوال :

١- تعدد قيمة المنوال فى بعض الأحوال ، كما أنها تتفاوت من عينة لاخرى من نفس المجتمع .
٢- ليس مقياسا دقيقا ، فقد لا يوجد منوال على الاطلاق أو قد يتعدد المنوال فى بعض الاحيان .
٣- تتوقف قيمته على اختيار فئات التوزيع ، أى أنه بتعدد فئات التوزيع تتعدد القيمة المنوالية .

## تمارين

٦ - أخذت مجموعة من المشاهدات عن بعض التجارب الزراعية المتعلقة باستخدام الهرمونات ، فكانت النتائج كالآتي :

التجربة الأولى : النتائج : ٨٥ ، ٧٦ ، ٩٣ ، ٨٢ ، ٩٦

التجربة الثانية : ١٨,٣ ، ٢٠,٦ ، ١٩,٣ ، ٢٢,٤٠ ، ٢٠,٤ ، ١٨,٨ ، ١٩,٧٠ ، ٢٠,٠ .

أ- هل تحتوى نتائج التجربتين على منوال ؟

ب- احسب كل من المتوسط الحسابى ، والوسيط .

٧ - فى الدرس العملى الأول ، تم تصميم كل من جدول التوزيع التكرارى ، وكل من التكرار المتجمع الصاعد والهابط فى السؤال الأول ( أ ) ، والسؤال الرابع ، والسؤال الخامس .

والمطلوب هو :

أ- حساب كل من المتوسط الحسابى ، والوسيط ، والمنوال لكل حالة على حدة .

ب- المقارنة بين النتائج المتحصل عليها فى (أ) من هذا السؤال بين قيم المتوسطات المقدرة .

٨ - ثلاث مدن هى القاهرة والاسكندرية والمنصورة يمكن مجازا أن ترمز اليها بالرموز ( A ) ، ( B ) ، ( C ) على التوالى . حاول سائق سيارة أن يقطع المسافة بينها . وكان معدل السرعة فى المسافة من ( A ) الى ( B ) هو ٤٥ كم / ساعة ، ومن ( B ) الى ( C ) بمعدل سرعة ٦٠ كم / ساعة ، ومن ( C ) الى ( A ) بمعدل سرعة ٧٥ كم / ساعة . فما هو متوسط السرعة للمشوار ككل .

٩ - أ - احسب الوسط التوافقى ( H ) للأرقام التالية ٣ ، ٥ ، ٦ ، ٦ ، ٧ ، ١٠ ، ١٢ .

ب - فى سنة ما ، وجد أن سعر اللتر من اللبن الى سعر رغيف العيش هى ٠,٠٣ ، وفى العام التالى أن هذه النسبة هى ٠,٠٢ .
أوجد :

(١) المتوسط الحسابى لنسبة سعر اللبن الى العيش .
(٢) المتوسط الحسابى لنسبة سعر العيش الى اللبن .
(٣) هل من النتائج السابقة يمكن القول أن المتوسط الحسابى مقياسا جيدا فى هذه الحالة ؟
(٤) أوجد الوسط الهندسى للنسب السابقة ، وقارن مع النتائج السابقة .

# الباب الرابع

## مقاييس التشتت والالتواء

## Measures of Dispersion & Skewness

### أولا : مقاييس التشتت

تتعلق مقاييس التشتت بدرجة انتشار أو تباين المشاهدات حول القيمة المتوسطة Average Value . وهناك العديد من تلك المقاييس ومنها :

### ٤-١- المدى

### Range

فالمدى لمجموعة من القيم هو الفرق بين أكبر وأصغر قيمة .

**مثال :** كانت البيانات المتحصل عليها من دراسة أثر العليقة المركزة على انتاج اللبن لبعض أصناف القرزيان هى :

١٢، ١٥، ١٧، ٢٠، ٢٥، ٢٢، ٣٠ كم/يوميا فى موسم الحليب .

ماهو مدى تشتت هذه البيانات ؟

المدى هو = ٣٠ - ١٢ = ١٨ كم/ يوميا بين أصناف الفرزيان .

والمدى بصفة عامة سهل الحساب والفهم - ويعطى فكرة سريعة عن مدى اختلاف المفردات فى العينة . بيد أنه قد يعطى نتائج مضلله عن مدى الاختلاف بين مفردات العينة ، خاصة فى حالة وجود قيم شاذة . هذا فضلا عن اعتماده على أكبر وأصغر قيمه فقط فى العينة ، وبالتالى فلا يتأثر ببقية القيم .

ولحساب المدى من جدول التوزيع التكرارى يتم طرح بداية

أصغر فئة فى الجدول من نهاية أكبر فئة . بذلك ، فلا يمكـــن حسابه من الجداول التكرارية المفتوحة . ويستخدم المدى بصفة عامة فى حالات ضبط المواصفات ، والتغير فى درجات الحرارة المسجلة يوميا ، وتغيير الأسعار ......... الخ .

## ٤-٢- الانحراف المتوسط

## The Mean ( Average ) Deviation .

كما سبق الاشارة فأن مجموع انحرافات القيم عن الوسـط الحسابى = صفرا . وبذلك فأنه يمكن الحصول على الفرق المطلـق أو الانحرافات المطلقة ، ويكون متوسط مجموع الانحرافات المطلقة عن الوسط الحسابى هو الانحراف المتوسط . M . D

$$M.D. = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} | X_i - \bar{X} |$$

مثال : أوجد الانحراف المتوسط لمجموعة القيم ٢ ، ٣ ، ٦ ، ٨ ، ١١

الحل : نبدأ بحساب المتوسط الحسابى $\bar{X}$ وهو فى هذه الحالة = ٦ وبذلك يكون .M.D

$$M.D = \frac{|٢-٦| + |٣-٦| + \text{صفر} + |٨-٦| + |١١-٦|}{٥} = \frac{١٤}{٥} = ٢,٨٠$$

وفى حالة الجداول التكرارية ، فأن

$$M.D. = \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i | X_i - \bar{X} |}{\sum_{i=1}^{k} f_i}$$

ويتم حسابه ، بحساب المتوسط الحسابى بالطرق العادية ، ثـم نحسب انحرافات متوسط الفئات ( $X_i$ ) من الوسط الحسابى $\bar{X}$ مـع اهمال الاشارة ، ثم نرجح بالتكرارات المقابلة ، ونقسم على مجمـوع التكرارات .

**مثال :** فى المثال السابق شرحه ص ٢١ من هذا الكتاب، كان المتوسط الحسابى هو ٦٢,٩٨ . بذلك نكمل الخطوات للحصول على M.D . كما هو بالجدول التالى :

| مركز الفئة | التكرارات | $\lvert X_i - \bar{X} \rvert$ | $f_i \lvert X_i - \bar{X} \rvert$ |
|---|---|---|---|
| ٥٥,٥٠ | ٥ | ٧,٤٨ | ٣٧,٤٠ |
| ٥٩,٥٠ | ١٢ | ٣,٤٨ | ٤١,٧٦ |
| ٦٣,٥٠ | ٢٢ | ,٥٢ | ١١,٤٤ |
| ٦٧,٥٠ | ٧ | ٤,٥٢ | ٣١,٦٤ |
| ٧٢,ـ | ٤ | ٩,٠٢ | ٣٦,٠٨ |

$$M.D. = \frac{١٥٨,٣٢}{٥٠} = ٣,١٦$$ تقريبـــا

هذا مع ملاحظة أنه فى بعض الأحيان ، ما يمكن اعتبار الوسيط بدلا من المتوسط الحسابى فى حساب متوسط الانحراف ، كذلك فأنه من الخواص ذات الأهمية الكبرى أن :

$\sum_{i=1}^{k} \lvert X_i - a \rvert$ = أدنى ما يمكن عندما تكون :

a = الوسيط .

والانحراف المتوسط بصفة عامة هو أقل مقاييس التشتت أهمية .

## ٤-٣ الانحراف المعيارى

## Standard Deviation

الانحراف المعيارى للقيم $X_1, X_2, X_3 \ldots\ldots\ldots X_n$ هو الجذر

التربيعى لمتوسط مجموع مربع انحرافات تلك القيم عن المتوسط الحسابى أى :

$$\text{الانحراف المعيارى} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}{N}} =$$

$$= \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{N}} \;,\; = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{N} - \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{N}\right)^2}$$

حيث أن $x_i = X_i - \bar{X}$ أو انحرافات القيم عن متوسطها الحسابى

وفى حالة حساب الانحراف المعيارى من جدول توزيع تكرارى ، فأنه يمكن حسابه من المعادلة التالية :

$$\text{الانحراف المعيارى} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{k} f_i(X_i - \bar{X})^2}{\sum_{i=1}^{k} f_i}} = \text{حيث أن } \sum_{i=1}^{k} f_i = N$$

وببساطة هنا يجب أن تناقش عدة نقاط منها :

أولا : فى الصيغ السابقة المختلفة لتقدير الانحراف المعيارى ، فأننا قسمنا مجموع مربع الانحرافات Total Sum of Squares(SS) على N . كذلك فقد استخدم $\bar{X}$ كتقدير غير متحيز لمتوسط المجتمع U . وبذلك فأنه فى حالة العينة ، فأننا حقيقة نأخذ عينة من حجم $n \leqslant N$ ، ونقوم بتقدير المعلمه U بالمتوسط الحسابى $\bar{X}$ . من ذلك ممكن أن نحدد مفهوم ما يسمى بدرجات الحرية (D.F) Degrees of freedom على أنها عدد المشاهدات المستقلة ناقص عدد المعالم المقدرة . من ذلك يكون المطلوب فى حالة تقدير الانحراف المعيارى من العينة هو القسمة على n-1 بدلا من N . وبذلك نحصل على تقدير للمعلمه $6^2$ = تباين المجتمع ،

بالاحصائية $S^2$ ، أو أن

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$$

ويكون الأنحراف المعيارى $S$ هو الجذر التربيعى لـ $S^2$ ، وهو تقدير للانحراف المعيارى للمجتمع $\sigma$ .

ثانيا : تباين المجتمع هو $\sigma^2$ ، ويمكن الحصول عليه كالاتى :

$$\sigma^2 = \frac{1}{N} \sum (X - U)^2$$

والانحراف المعيارى $\sigma$ هو $\sqrt{\sigma^2}$ . هذه المعلمة من الصعب تقديرها على الأقل لعدم معرفة $U$ . وبذلك يتم تقديرها بتباين العينة $S^2$ ، بيد أنه فى حالة العينات الكبيرة الحجم يصبح

$$\sigma^2 = S^2$$

ثالثا : فى حالة الجداول التكرارية ، فأن حساب الانحراف المعيارى بالاعتماد على مركز الفئة كممثل لكل القيم بها ، غالبا ما يؤدى الى ما يسمى Grouping Error، وبذلك يكون هناك احتياج الى ما يسمى Sheppard's Correction للتباين وهو :

$$S_c^2 = S^2 - \frac{i^2}{12}$$

حيث أن $i$ هو مدى الفئة - وعموما فليس هناك اتفاق بين الاحصائيين الى متى وأين يكون تصحيح شبرد ضروريا ومطلوبا.ويكون مطلوبا وفقا لرأى الغالبية طبقا لطبيعة البيانات حتى لا تتعرض لما يسمى Overcorrection وهذا بمثابة احلال خطأ بخطأ آخر . وسوف نوضح ذلك .

رابعا : هناك العديد من الصيغ المستخدمة فى حساب الانحراف المعيارى والتباين - وهى كلها ما هى الا مفكوك للمقادير الواردة فى الصيغ السابقة ، جبريا :

$$SS = \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2 = \sum_{i=1}^{n} (X_i^2 - 2X_i\bar{X} + \bar{X}^2)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - 2\bar{X} \sum_{i=1}^{n} X_i + n\bar{X}^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - 2 \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}\right) \sum_{i=1}^{n} X_i + n \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}\right)^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2}{n} = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\bar{X}^2$$

وذلك حيث أن $n\bar{X} = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

ولا تختلف هذه الصيغ فى حالة الجدول التكرارى ، سوى بالترجيح بالتكرارات . وسنقوم بضرب أمثلة لتوضيح كيفية استخدام هذه الصيغ .

**مثال :** افترض أن محصول قطعة من الأرض صممت لفرض التجارب على محصول الذرة بالكيلو جرام كان ١٦ ، ١٧ ، ١٤ ، ١٢ ، ١٨ ، ١٣ - أوجد الانحراف المعيارى بالصيغ المختلفة السابقة .

| محصول القطن $X_i$ | $X_i - \bar{X}$ | $\sum_{i=1}^{\sigma} (X_i - \bar{X})^2$ | $\sum_{i=1}^{\sigma} X_i^2$ |
|---|---|---|---|
| ١٦ | ١ | ١ | ٢٥٦ |
| ١٧ | ٢ | ٤ | ٢٨٩ |
| ١٤ | ١ - | ١ | ١٩٦ |
| ١٢ | ٣ - | ٩ | ١٤٤ |
| ١٨ | ٣ | ٩ | ٣٢٤ |
| ١٣ | ٢ - | ٤ | ١٦٩ |
| $\sum^{\sigma} X_i$ = ٩٠<br>$\bar{X}$ = ١٥ | $\sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})$ = صفر | SS = ٢٨ | ١٣٧٨ |

بذلك يمكن حساب كالاتى :

$$S = \sqrt{S^2} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}$$

$$= \sqrt{\frac{٢٨}{٥}} = \sqrt{٥,٦} = ٢,٣٧ \text{ كج}$$

أو أن $= \sqrt{\frac{١}{٥}\left(١٣٧٨ - \frac{٩٠ \times ٩٠}{٦}\right)} = \sqrt{\frac{١}{٥}(١٣٧٨ - ١٣٥٠)} = \sqrt{\frac{٢٨}{٥}}$

أو $= \sqrt{\frac{١}{٥}(١٣٧٨ - ٦\,(١٥)^٢)} = \sqrt{\frac{١}{٥}(١٣٧٨ - ١٣٥٠)} = \sqrt{\frac{٢٨}{٥}} = ٢,٣٧$ كج

وبذلك يكون $S^2$ أو $\hat{\sigma}^2$ أو $\hat{V}(X)$ هو $(٢,٣٧)^٢ = ٥,٥٢$ تقريبا

**مثال ٢:** أوجد الانحراف المعيارى والتباين لأطوال مجموعة من ١٠٠ طالبا من طلاب جامعة ما ، من الجدول التالى :

| فئات الطول بالبوصة | مركز الفئة $X_i$ | التكرارات $f_i$ | $(X_i - \bar{X})$ | $\sum_{i=1}^{n} f_i (X_i - \bar{X})^2$ |
|---|---|---|---|---|
| ٦٠-٦٢ | ٦١ | ٥ | ٦,٤٥ - | ٢٠٨,٠١٢٥ |
| ٦٣-٦٥ | ٦٤ | ١٨ | ٣,٤٥ - | ٢١٤,٢٤٥٠ |
| ٦٦-٦٨ | ٦٧ | ٤٢ | ,٤٥ - | ٨,٥٠٥٠ |
| ٦٩-٧١ | ٧٠ | ٢٧ | ٢,٥٥ | ١٧٥,٥٦٧٥ |
| ٧٢-٧٤ | ٧٣ | ٨ | ٥,٥٥ | ٢٤٦,٤٢٠٠ |
| | | | | $\sum$....= ٨٥٢,٧٥ |

الانحراف المعيارى $(S) = \sqrt{\frac{٨٥٢,٧٥٠٠}{١٠٠}} = \sqrt{٨,٥٢٧٥} = ٢,٩٢$ بوصة ، $S^2 = (٢,٩٢)^٢$

**خواص الانحراف المعيارى** : هناك العديد من الخواص التى نوقشت فى كتب الاحصاء ومن أهمها :

( ١ ) أنه أساس لتقديرات أخرى ، كما سنورد شرحه .

( ٢ ) عند استخدام المتوسط الحسابى لتقدير الانحراف المعيارى ، فأن هذه القيمة تكون أدنى ما يمكن ، ويمكن اثبات ذلك كما يلى :

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(X_i - a)^2}{N}} = \sqrt{\frac{1}{N}\left(\sum_{i=1}^{N} X_i^2 - 2a \sum_{i=1}^{N} X_i + Na^2\right)}$$

$$= \sqrt{\left(a^2 - 2a\left(\frac{\sum_{i=1}^{N} X_i}{N}\right) + \frac{\sum_{i=1}^{N} X_i^2}{N}\right)}$$

وهذا المقدار هو أدنى ما يمكن عندما يكون $a = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i$ .

( ٣ ) فى حالة التوزيع الطبيعى فأن نحو ٦٨,٢٧٪ من المشاهدات تكون بين $\bar{X} \pm s$ ، ونحو ٩٥,٤٥٪ من المشاهدات تقع بين $\bar{x} \pm 2s$ ، ونحو ٩٩,٧٣ ٪ من المشاهدات تقع بين $\bar{x} \pm 3s$ .

( ٤ ) بافتراض أن لدينا مجموعتين من القيم هما $N_1$ ، $N_2$ أو توزيعين تكرارين حيث أن مجموع التكرارات هو $N_1, N_2$ وأن التباين المقدر هو $S_2^2, S_1^2$ على التوالى ، والمتوسط واحد وهو $\bar{X}$ ، فأن التباين التجميعى لكلاهما هو :

$$S_p^2 = \frac{N_1 S_1^2 + N_2 S_2^2}{N_1 + N_2}$$

$$= \frac{1}{(N_1+N_2)} \left[ \sum_{i=1}^{N_2} ( X_i^{(1)} - \bar{X} )^2 + \sum_{i=1}^{N_2} ( X_i^{(2)} - \bar{X} )^2 \right] \quad (*)$$

$$= \frac{1}{(N_1+N_2)} \left( SS^{(1)} + SS^{(2)} \right)$$

**عيوب الانحراف المعيارى :**

(١) تتميز الانحراف المعيارى هو نفس تمييز وحدات القياس المستخدمة فى العينة المحسوب منها . بذلك لا يمكن استخدامه فى مقارنة تشتت عينتين اذا اختلفت وحدات القياس المميزة لمفردات كل منهما .

(٢) يعتمد فى حسابه على المتوسط الحسابى - لذلك لا يمكن استخدامه فى مقارنة التشتت فى عينتين تختلفان عن بعضهما كبيرا من حيث المتوسط الحسابى .

**٤-٤ الخطأ المعيارى - التشتت المطلق والنسبى ومعامل الاختلاف**

**Standard Error, Absolute and Relative Dispersion, and Coefficient of Variation.**

لكل من هذه المقاييس استخداما خاصا . فمثلا

التشتت النسبى = $\frac{\text{التشتت المطلق}}{\text{المتوسط}}$ ، فاذا كان المتوسط هو $\bar{x}$ ،

وأن التشتت المطلق هو S ، فأن

(*) الأرقام (١)، (٢) أعلى $X_i$ هى رموز وليس أسس ، حتى يتسنى قرآة الحروف قرآة صحيحة ، وذلك للمجموعة (١) والمجموعة (٢) على التوالى .

معامل الاختـــلاف ( .C.V ) = $\frac{S}{\bar{X}}$ x ١٠٠

هذا مع ملاحظة أن القيم الصفرية لكل من $\bar{X}$ ، S . أما الخطـــأ القياسى فيحسب من المعادلة $\hat{\sigma}_{\bar{X}} = S_{\bar{X}} = \frac{S}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{S^2}{n}}$

وببساطة يمكن استخدام الحسابات السابق التوصل اليها للحصول على تقديرات لهذه الاحصائيات .

## ثانيا : العزوم ، الالتواء والتفرطح

## Moments, Skewness and Kurtosis

### أ - العـــــــزوم

### Moments .

افترض أن المتغير x يأخذ القيم $X_1, X_2, X_3 \dots X_N$ . بذلك يمكن القول أن :

$$X^r = \frac{X_1^r + X_2^r + \dots X_N^r}{N} = \frac{\sum_{i=1}^{N} X_i^r}{N} = \frac{\sum^{N} X^r}{N} \qquad (1)$$

هى العزم r أو r-th moment . وبذلك يكون العزم الأول ( عندما تكون r = 1 ) هو المتوسط الحسابى $\bar{X}$ . أما العـــزوم حول المتوسط الحسابى $\bar{X}$ فهى :

$$m_r = \frac{\sum_{i=1}^{N} (X_i - \bar{X})^r}{N} \qquad (2)$$

وبذلك فعندما تكون r=1 فأن $m_1$ = صفر . والطالب الآن يعلم السبب . أما عندما تكون r=2 ، فأن $S^2 = m_2$ أو التباين . كذلك فأن العزوم حول أى نقطة أصل فهى :

$$m'_r = \frac{\sum_{i=1}^{N} (X_i - A)^r}{N} = \frac{\sum d^r}{N} \qquad (3)$$

حيث أن $X - A = d$ . وبذلك لو أن $A = o$ فأن $m_r$ هى (١) أو $X^r$ . ولهذا السبب فأن (١) غالبا ما يطلق عليها العزم حول نقطة الأصل أو الصفر .

وفى حالة البيانات المدونة فى جدول توزيع تكرارى ، فـــأن الصيغ (١) - (٣) ترجح بالتكرارات . فعلى سبيل المثال :

$$X^r = \frac{\sum_{i=1}^{N} f_i X_i^r}{N}$$

حيث أن $\sum_{i=1}^{N} f_i = N$ .

## ب - الالتـــــواء

## Skewness

الالتواء هو درجة من درجات عدم التماثل Asymmetry. وبذلك تكون التوزيعات المتماثلة غير ملتوية . وبصفة عامة قـــد يكون التوزيع ملتويا جهة اليسار أو جهة اليمين ، الشكل البيانـى رقم (٧) - (٨) ص ٣٩ ، من هـــذا الكتـــاب . وهناك عدة طـــرق لقياس الالتواء منها :

$$\text{معامل الالتواء} = \frac{\text{المتوسط الحسابى - المنــــوال}}{\text{الانحراف المعيارى}} = \frac{\bar{X} - M}{S}$$

ويمكن فى هذه الحالة استخدام المتساوية السابق الاشارة اليها فى ص ٣٨ من هذا الكتـــاب ، ويصبح معامل الالتواء هـــو :

$$\text{معامل الالتواء} = \frac{\text{٣ ( المتوسط - الوسيط )}}{\text{الانحراف المعياري}} = \frac{3(\bar{X} - \tilde{X})}{s}$$

وغالبا ما يطلق على هاذين المقابيس معاملى بيرسون الأول والثانى للالتواء .

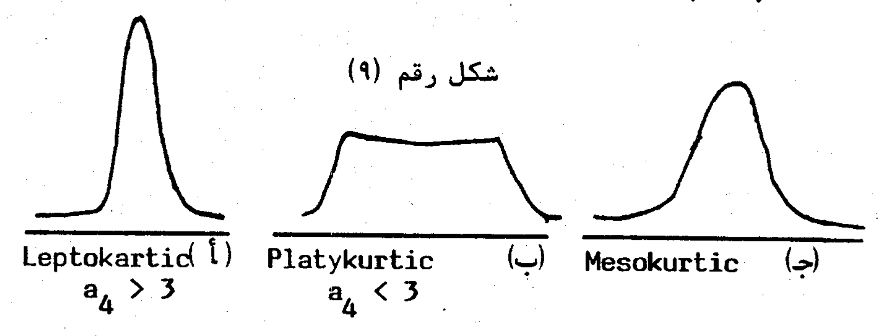
أيضا فأنه فى حالة التوزيعات المتماثلة ، فأن العزم الثالث عن المتوسط الحسابى = صفرا ، وتكون قيمة العزم الثالث موجبة أو سالبة فى حالة التوزيعات الغير متماثلة ، بذلك يمكن استخدام العزم الثالث لحساب معامل الالتواء .

$$\text{معامل الالتواء} = a_3 = \frac{m_3}{S^3} = \frac{m_3}{(\sqrt{m_2})^3} = \frac{m_3}{\sqrt{m_2^3}}$$

ويمكن حساب الالتواء ، من النتائج السابق التوصل اليها فى الدرس العملى الثالث والرابع .

## جـ - التفرطح
## Kurtosis

يتعلق التفرطح بصفة عامة بدرجة تفرطح أو تدبب قمم المنحيات وبصفة عامة هناك ثلاث أشكال ، كما هو فى الشكل البيانى رقم (٩) أ ، ب ، جـ .




شكل رقم (٩)

وقياس التفرطح باستخدام العزم الرابع حول المتوسط الحسابى ، وهو

$$a_4 = \frac{m_4}{S^4} = \frac{m_4}{m_2^2}$$

هذا مع ملاحظة أنه فى حالة التوزيع الطبيعى فأن $a_4 = 3$. وبذلك يمكن اعتبار المقدار $(a_4 - 3)$ كمقياس للتفرطح عن التوزيع الطبيعى ، شكل رقم (٩) أ ، ب .

## تماريــــــــن

(١٠) للتمارين السابقة ، والسابق حلها فى الدرس العملى الأول والثانى والثالث ، قدر مقاييس التشتت المختلفة .

(١١) قام أحد الباحثين الزراعيين بوزن عشرين عجلا حيا بعـــد ولادتها ، فكان الوزن بالكيلو جرام هو :

١٥ ، ١٥ ، ١٣ ، ١٦ ، ١٥ ، ١١ ، ١٤ ، ١٥ ، ١٨ ، ١٥
١٢ ، ١٧ ، ١٦ ، ١٤ ، ١٤ ، ١٣ ، ١٩ ، ١٥ ، ١٧ ، ١٥

احسب كل من :
(١) المتوسط الحسابى ، (٢) المنوال ، (٣) الوسيـــــط ،
(٤) المدى ، (٥) الانحراف المعيارى ، (٦) معامل الاختلاف
(٧) اثبت أن مجموع انحرافات المفردات عن متوسطهـــــا الحسابى = صفرا .
(٨) اثبت أن مجموع مربع الانحرافات عن المتوسط الحسابى اقل ما يمكن بالمقارنة الى مقاييس التوسط الأخرى ، أو أى قيمة أخرى .
(٩) حدد نسبة الأوزان التى تقع بين

$$\bar{X} \pm 2\,S$$

(١٢) لتجربة قمح ، اذا علمت أن معامل الاختلاف هو ٧٪ ، فما هو الانحراف المعيارى لهذه التجربة ، اذا كان متوســـط محصول القمح الناتج منها هو ١٢ أردب للفدان .

# الباب الخامس

## مبادىء الاحتمالات (*)

## Probability

الاحتمال هو بصفة عامة التكرار النسبى البسيط لعدد مرات حدوث حدث ما . أو هو النسبة $\frac{m}{n}$ ، حيث أن n هو عدد كل الممكنات لحدوث هذا الحدث . ويمكن توضيح هذا المضمون بالمثال التالى :

**مثال ١:** القيت زهرة طاولة غير متحيزة ؟ ما هو احتمال الحصول على عدد زوجى ؟

**الحل :** الاحتمال = $\frac{٣}{٦}$ = Prob. ( A )

وبعد هذا التفكير البسيط ، تطور التفكير على يد العالم الروسى A.N. Kolmogrov كولمو جروف . والذى توصل الى ثلاثة فروض أساسية للاحتمالات ، كما سيرد شرحه . وللتوصل الى مفهوم واضح لهذه الفروض ، جدير بنا أن تحدد ما يسمى بفراغ العينة Sample Space ( S )

فراغ العينة ( S ) : لأى تجربة هو مجموعة من كل النتائج الممكنة لهذه التجربة .

**مثال ٢:** القيت عملة ، فما هو فراغ العينة لهذه التجربة ؟

S = ( H, T )

(*) هذا الجزء من الكتاب مترجم مباشرة مع التبسيط للطالب المبتدأ من مذكرات د.رياض السيد عمارة ، النظرية الاحصائية ، باللغة الانجليزية ، كلية الزراعة ، جامعة القاهرة ، قسم الاقتصاد الزراعى ، ١٩٨٣/٨٢ .

ومكن كتابته $S = (1,0)$ . حيث أن $H = 1$ ، $T = 0$.

**مثال ٣ :** القيت زهرة طاولة ، ما هو فراغ العينة لهذه التجربة ؟

$S$ = ( ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ )

**مثال ٣ :** أختير طالبا عشوائيا ، أوجد فراغ العينة ؟

$S = ( X : 60 \leq X \leq 80 )$

**مثال ٤ :** وضعت لمبة كهربائية فى اختبار جودة ؟ فما هو فراغ العينة للعمر الافتراضى لهذه اللمبة .

$S = ( t : t \geq 0 )$

وفراغ العينة يحتوى على مجموعة من العناصر Elements . وكذلك ففى بعض الأحيان يمكن حصر العناصر فى فراغ العينة ، وفى هذه الحالة يكون محددا Finite . واذا أمكن حصر العناصر ، ففراغ العينة فى هذه الحالة يقال أنه Countable . كذلك فاذا كان فراغ العينة متضمنا عدد محدد من العناصر أو عدد غير محدد من العناصر ولكن يمكن حصره ، يقال عنه Discrete . كذلك فمن الممكن أن يكون فراغ العينة محتويا على عدد لا نهائى من نقاط العينة Sample Points المختلفة والمتصلة ، بذلك يكون فراغ العينة متصلا Continuous .

والحدث هو جزء Subset من فراغ العينة . ويحدث الحدث ، لو أن أى عنصر من عناصره هو ناتج من التجربة .

**مثال ٥ :** بالرجوع الى المثال رقم (١) ، فأن كلا من المجموعات Sets التالية يعتبر حدثا An Event .

A = ( ١ ) , B = ( ١ ، ٣ ، ٥ ) , C = ( ٣ ، ٤ ، ٦ )

D = ( ٤ ، ٥ ، ٦ ) , E = ( ١ ، ٣ ، ٤ ، ٦ )

**مثال ٦ :** القيت زهرة طاولة ، حدد الحدث مضاعف الرقم ٣

B = Event = ( ٦ ، ٣ )

**مثال ٧ :** ضع لمبتين للاختبار ، ما هو فراغ العينة ؟ حدد الحدثين

A = كلاهما كان معمرا على الأقل لنحو ١٠٠ ساعة ،

B = عمر اللمبة الأولى أطول من عمر اللمبة الثانية ،

$$S = \{(t_1, t_2) : t_1 \geqslant 100 , t_2 \geqslant 100\}$$

$$A = \{(t_1, t_2) : t_1 \geqslant 100 , t_2 \geqslant 100\}$$

$$B = \{(t_1, t_2) : t_1 \geqslant t_2 \geqslant 0\}$$

**الفروض الأساسية للاحتمالات :** حدد كلموجروف الفروض الثلاثة التالية:

(1) $P(S) = 1$

(2) $P(A) \geqslant 0$ لكل $A \subset S$

(3) $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \ldots\ldots) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3)$

لو أن $A_i \cap A_j = \emptyset$ لكل $i \neq j$ ............

أيضا فبصفة عامة ، تعرف الدالة الاحتمالية Probability Function بأنها دالة حقيقية تأخذ قيم حقيقية ويمكن تحديدها على مجموعة من الاحداث فى فراغ العينة . كذلك فأننا غالبا ، نرمز الى احتمال حدوث الحدث A على أنه $P(A)$ . وهناك بعض النظريات القائمة على الفروض السابقة ومنها :

**نظرية ١ :** لأى فراغ عينة $S$ ، $P(\emptyset) = 0$

**الاثبات :** يمكن اعتبار فراغ العينة على أنه $S = S \cup \emptyset$

ومن المعلوم للطالب أن $S \cap \emptyset = \emptyset$ ( لا يوجد عنصر مشترك )

حينئذ باستخدام الفروض (١) ، (٣)

$$P(S) = P(S \cup \emptyset)$$
$$1 = P(S) + P(\emptyset)$$

أو أن $P(\emptyset) =$ ١ - ١ = صفر . أو أن احتمال شيئا لم يحدث = صفر

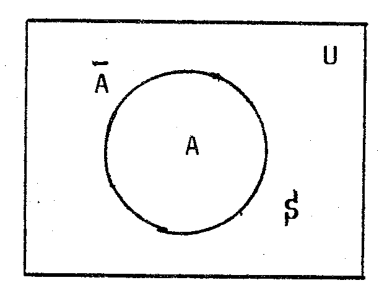
**نظرية (٢) :** $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

من المعلوم أن $S = A \cup \bar{A}$ ، شكل رقم (١٠) .
حينئذ $P(S) = P(A \cup \bar{A})$
ومن الفروض (١) ، (٣) فأن :

$$1 = P(A) + P(\bar{A})$$

( بما أن $A \cap \bar{A} = \emptyset$ )

حينئذ
$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$




Venn Diagram

شكل رقم (١٠)

**نظرية (٣) :** $P(\bar{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$

**الاثبات :** يمكن كتابة B على أنها : $B = B \cap S$

ويمكن احلال $S$ بـ $A \cup \bar{A}$ ، بذلك

$$B = B \cap (A \cup \bar{A})$$

$$= (B \cap A) + (B \cap \bar{A})$$

ويكون : $P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap \bar{A})$

أو $P(B \cap \bar{A}) = P(B) - P(B \cap A)$

حيث أن $B \cap \bar{A} = \bar{A} \cap B$

أو أن : $P(\bar{A} \cap B) = P(B) - P(B \cap A)$

**نظرية (٤) :** $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

**الاثبــات :** $A \cup B = A \cup (B \cap \bar{A})$

وبما أن $A \cap (\bar{A} \cap B) = \emptyset$

حينئذ $P(A \cup B) = P(A) + P(B \cap \bar{A})$

وباستخدام نتائج النظرية رقم (٣) وبالتعويض ، فأن

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

**مثال :** افترض أن $P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$ ، وأن $P(A \cap B) = \frac{2}{3}$

أوجد (١) $P(\bar{A})$ ، (٢) $P(A \cap B)$ ، (٣) $P(A \cap \bar{B})$

**الحل :**

(١) $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

(٢) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$$\frac{2}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - P(A \cap B)$$

أو أن $P(A \cap B) = \frac{1}{3}$

$$P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \quad (٣)$$

كذلك ، فلفراغ العينة $S$ لو أن أى حدث A هو $A \subset S$ ،

فأن $P(A) = P(A_1) + P(A_2) \ldots\ldots\ldots P(A_k) = \sum_{i=1}^{k} P(A_i)$

وذلك بشرط أن $A_i \cap A_j = \emptyset$ لكل $i \neq j$

نظرية : لو أن A ، B ، C هى ثلاثة أحداث فى فراغ العينة $S$ ،

فأن $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$

$- P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$

## الاحتمالات المشروطة : Conditional Probability:

يمكن اعتبار $P(A)$ على أنها $P(A/S)$ أو هى احتمال A بشرط وجود $S$ . والاحتمال المشروط لحدث هو احتمال حدوث هذا الحدث بشرط حدوث الحدث الآخر . وبصفة عامة لو أن A ، B هما أى حدثتين فى فراغ العينة $S$ ، وأن $P(A) \neq \emptyset$ ، فأن الاحتمال المشروط لـ B بشرط حدوث A هو :

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

وبذلك يمكن التوصل الى نظرية هامة هى :

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A)$$

أى أن احتمال حدوث كل من A ، B هو مضروب احتمال A فـــى

احتمال حدوث B بشرط حدوث A . وبملاحظة أن $A \cap B = B \cap A$
كما سبق القول ، فأن $P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A/B)$

**مثال :** فى كارت قياس من أوراق اللعب يتضمن ٥٢ ورقة ، ما هو احتمال الحصول على ورقتين للرقم ١٠ فى حين اجـــراء السحب بدون احلال ، وباحلال .

**الحل :**

$$\text{الحالة الاولى} = \frac{4}{52} \cdot \frac{3}{51} = \frac{1}{221}$$

$$\text{الحالة الثانية} = \left(\frac{4}{52}\right)\left(\frac{4}{52}\right) = \frac{1}{169} > \frac{1}{221}$$

لاحظ أنه للحصول على الاحتمال فى الحالة الاولى ، فأننا ضربنـــا $P(A)$ فى $P(B/A)$ وهو احتمال الحصول على ورقة عليهـــا الرقم ١٠ بشرط سحب الورقة الاولى وعليها الرقم ١٠ .

وبصفة عامة فأن :

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B/A) \cdot P(C/A \cap B)$$

حيث أن $P(A) \neq 0$ ، وأن $P(A \cap B) \neq 0$ .

**الأحداث المستقلة : Independent Events** يقـــال أن حدثين مستقلين Independent لو أن حدوث أحدهما لا يؤثـــر فى حدوث أو عدم حدوث الحدث الآخر . وبصفة عامة ، أى حدثيـــن A , B يعتبران مستقلان لو أن $P(B/A) = P(B)$
أى أن الاحتمال المشروط يساوى الاحتمال غير المشروط . على ذلك يكون فى حالة الاحداث المستقلة :

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A) = P(A) \cdot P(B)$$

وهذا هو التعريف الأساسى لاستقلال الاحداث . وبصفة عامة لـو أن أى حدثين A ، B مستقلين ، فأن الحدثين $A , \bar{B}$ هى أيضـــا مستقلين .

ويجب أن نميز بدقة بين استقلال الأحداث Independence، وبين كون هذه الأحداث متنافية Mutually Exclusive والأخيرة هى الأحداث التى لا تشترك فى نقط فراغ العينة Sample Points. وبذلك يمكن أن يقال أن حدوث أى حدث يمنع حدوث الآخر تماما ، أو أن كلاهما لا يحدث بالتتابع أو أن :

لأن : $P(A \cap B) = 0$

$$A \cap B = \emptyset$$

وبصفة عامة ، فأنه لأحداث $A_1 , A_2 \dots\dots\dots A_k$ يمكن القول أنها مستقلة لو أن :

$$(1)\ P(A_i \cap A_j) = P(A_i) \cdot P(A_j)$$

$$(2)\ P(A_i \cap A_j \cap A_k) = P(A_i)\ P(A_j)\ P(A_k)$$

$$(3)\ P(A_1 \cap A_2 \dots\dots\dots A_n) = \prod_{i=1}^{n} P(A_i)$$

ويجب استيفاء كل هذه الشروط لأكثر من حدثين حتى نتجنب ما يسمى بالـ Pairwise Dependence

**مثال :** القيت زهرتى طاولة . فاذا اعتبرنا أن الحدث A هو أن مجموع الوجهين = ٧ ، والحدث B أن كلا الوجهين متساوين . فأن

$$P(A) = \frac{1}{6}$$

$$P(B) = \frac{1}{6}$$

ولكن $P(A \cap B)$ = صفر - لأنه لا يمكن الحصول على وجهين متساوين ومجموعهما = ٧ ، بذلك فالحدثين A ، B غير مستقلين ولكنها أحداث متنافية ، وهذا المثال يؤكد أن الاستقلال أو عدم الاستقلال لا يعنى تنافى الأحداث .

**مثال ٢ :** فى دراسة علاقة لون العين بالجنس ، أمكن الحصول على الآتى :

| | ( B ) أزرق | آخر |
|---|---|---|
| ( A ) | ذكر : ٥٠, | ٢٠, |
| | أنثى : ١٠, | ٢٠, |

هل A ، B مستقلين ؟

**الحل :** $P(A \cap B) = \frac{1}{2}$ ، $P(A) = 0.7$ ، $P(B) = 0.60$ .

بذلك $P(A \cap B) = 0.50 \neq 0.42 = P(A) \cdot P(B)$

بذلك يكون الحدثين A ، B غير مستقلين . أيضا ، بما أن $P(A \cap B) \neq 0$ فهما غير متنافين . وهذا يؤكد النتيجة السابقة .

## ملحق الاحتمالات

### المجموعات Sets

المجموعة Set هى مجموعة من العناصر . وقد تكون هذه العناصر متميزة . ومثال ذلك مجموعة من الأرقام أو عدد الطلاب فى فصل دراسى ، أو مجموعة من الحيوانات وهكذا .

**مثال :** الأرقام ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ تشكل مجموعة . وكل عنصر ينتمى Belongs to الى هذه المجموعة يسمى عنصر . وهناك طريقتين لكتابة المجموعات وهما :

A=( a,b,c,)    Roster Method of Specification
B=( x : x = 1,2,3,.....10) Rule Method of Specification

وتقرأ هاتين المجموعتين ، على أن A هى مجموعة من العناصر a , b , c وأن B هى مجموعة من العناصر حيث أن X= 1 , X=2 , X= 3 .......... X= 10 . ويعبر الرمز ∈ عن انتماء عنصر ما الى مجموعة ما ، ويكون الرمز ∉ يعنى أن هذا العنصر لا ينتمى الى . ومثال ذلك يمكن أن نقول أن $a \in A$ ، وأن $a \notin B$ ، $20 \notin A$ وهكذا .

## بعض المفاهيم الأساسية :

**١ـ التساوى Set Equality :** يقال أم مجموعة Two Sets متساوتين فقط اذا كان كل عنصر ينتمى الى المجموعة الأولى ، ينتمى أيضا الى المجموعة الثانية . أو

$X \in A \Rightarrow X \in B$
$X \in B \Rightarrow X \in A$

حيث أن : ⇐ السهم يعنى Implies أو يعنى أنه أو يدل علىأن بذلك تكون المجموعتان A ,B متساويتان . لأن $A \subseteq B$ ، $B \subseteq A$ أو أن $A \subset B$ أو $B \subset A$ . وعلى ذلك فأن $A = A$ أ) أن المجموعة تعتبر Reflexsive .

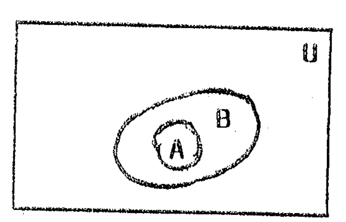
**مثال ١ :** المجموعتان ( B = ( a,1,2,3 ، B = (1,2,a,3 ) متساوتين . وهذا يعنى أن الترتيب غير هام وكذلك التكرار أيضا غير هام ومثال ذلك المجموعتين C= ( 1,2,3), D = ( 1,2,2,1,3,3,1 ) متساويتين .

**٢ـ الجزء Subset :** A جزء من B وتكتب $A \subset B$ لو أن

فقط كل عنصر من A أيضا هو عنصر منB ، أى أن B تحتوى على أو تتضمن A . الشكل البيانى رقم (١١) . ويمكن اثبات ذلك كمايلى:

$X \in A \Rightarrow X \in B$

أو أن X عنصر من B ، وهذا يعنى أن $A \subseteq B$ أو أن $A \subset B$ .




Venn's Diagram
شكل رقم (١١)

**مثال ١:** ( a ) هو جزء من (a , 3) وكلاهما جزء من (a, b, 3) وهكذا .

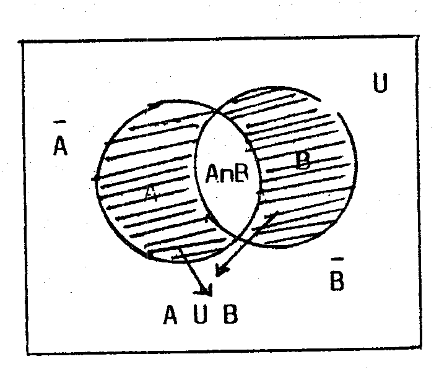
**مثال ٢ :** $(1) = C$ ، $B=(1,3)$ ، $A=(1,2,3)$ هى ثلاث مجموعات حينئذ صحيح أن نقول أن $B \subset A$ ، $C \subset A$ ولكن غير صحيح أن نقول أن $B \in A$ أو $C \in A$ طالما أن B , C غير محددين فى A . وأيضا صحيح أن نقول أن $1 \in C$، $1 \in A$ وغير صحيح أن نقول أن $1 \subset A$ ، $1 \subset C$ لان 1 ليس فئة فى هذه الحالة . بذلك صحيح أن نقول أن $A = A$ , $A \subseteq A$ , $A \subset A$ لكل A .

## ٣ ـ الاتحاد Union : يكتب الاتحاد Union على أن $A \cup B$

وهو عبارة عن مجموعة Set تتكون من كل العناصر فى A أو B أو كليهما . أو

$$A \cup B = (X : X \in A \text{ or } X \in B)$$

انظر شكل رقم (١٢) .




Venn's Diagram

شكل رقم (١٢)

**مثال :** افترض أن $A = (1,2)$ ، $B = (1,3)$ ، $C = (0)$ أوجد $A \cup B$ ، $A \cup C$ ، $B \cup C$

**الحل :** $A \cup B = (1,2,3)$ ، $A \cup C = (0,1,2)$ ، $B \cup C = (1,3,0)$

ويمكن ببساطة اثبات أن عمليات الفئات ومنها الاتحاد هى :

(١) Commutative أى أن $A \cup B = B \cup A$

(٢) Associative أى أن $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

كذلك ،فلأى مجموعتين A,B ، لو أن $B \subset A$ يكون $A \cup B = A$

**(٤) التقاطع Intersection :** يكتب التقاطع لكل من A,B كالآتى $A \cap B$. والتقاطع هو مجموعة Set تتكون من كل من العناصر المشتركة من A , B. أى أن

$A \cap B = (X : X \in A \text{ and } X \in B)$ ، شكل رقم (١٢).

**مثال :** $A = (1,2)$ ، $B = (2,3,4)$ . يكون $A \cap B = (2)$

أيضا فالتقاطع Cummutative and Associative

أى أن

$A \cap B = B \cap A$ ......(1) , $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ ..(2)

٥ـ المكمل Complement : مكمل A هو $\bar{A}$ . وهو مجموعة من العناصر الغير محددة فى A . أو :

$\bar{A} = (X : X \notin A)$

فلو أن $U = (X : 1 \leq X \leq 10)$ ، $A = (X : 1 \leq X \leq 2)$ ، $B = (1,10)$ يكون $\bar{A} = (X : 2 < X \leq 10)$ ،

$\bar{B} = (X : 1 < X < 10)$ ، وأن $A \cup \bar{A} = U$ . وتلعب $( \quad ) = \emptyset$ أو المجموعة الخالية دور الصفر فى الأرقام العادية .

## تمارين

(١٣) احسب احتمال حدوث كل من الأحداث التالية :

أ - الحصول على عدد فردى فى حالة القاء زهرة طاولة .
ب - على الأقل يظهر "وجهة " مرة واحدة عند القاء عملة غير متحيزة مرتين .

(١٤) سحبت كرة عشوائية من صندوق يحتوى على ٦ كرات حمراء، ٤ كرات بيضاء ، ٥ كرات زرقاء . ما هو احتمال :

(١) أن تكون الكرة حمراء .
(٢) أن تكون الكرة بيضاء .
(٣) أن تكون الكرة زرقاء .
(٤) أن لا تكون حمراء .
(٥) أن تكون الكرة حمراء أو بيضاء .

(١٥) القيت زهرة طاولة غير متحيزة مرتين . ما هو احتمال ظهور ٤ أو ٥ أو ٦ عند القائها فى المرة الأولى ، واحتمال ظهور ١ ، ٢ ، ٣ أو ٤ عند القائها فى المرة الثانية . هل هذين الحدثين مستقلين ؟

# الباب السادس

## أهم التوزيعات الاحتمالية

## Special Probability Distributions

**مقدمة :** سبق أن ناقشنا بعض المبادىء الأساسية فى نظرية الاحتمالات . وكذلك طبيعة المتغيرات ومنها المتغيرات العشوائية (r. vs.) . واتضح لنا أن المتغير اما أن يأخذ قيما غير كسرية بين حدى التغير أو يأخذ أى قيم فى هذا المدى .

والتوزيع الاحتمالى يتوقف أولا على طبيعة المتغير الذى يصفه هذا التوزيع . فقد يكون مستمرا Continuous أو منفصلا Discrete ـ هذا فضلا عن التوزيعات الخاصة بالعينة Sampling Distributions . ويحدد ملامح التوزيع الاحصائى بصفة عامة كلا من المتوسط U والتباين $6^2$ . كما سيتضح فيما بعد .

### أ ـ التوزيعات الاحتمالية المنفصلة

### Discrete Probability Distributions

**١ ـ التوزيع المتجانس Discrete Uniform :** لو أمكن وصف متغير عشوائى ( r.v. ) ما بالدالة الاحتمالية Probability Function التالية ، يقال أن التوزيع متجانسا :

$$f(x) = \frac{1}{k} \quad , x = x_1 , x_2 \ldots\ldots\ldots\ldots x_n$$

حيث أنه عندما $i \neq j$ فأن $x_i \neq x_j$

ويمكن ببساطة اثبات أن :

$$U_x = E(x) = \sum_{i=1}^{k} X_i \cdot \frac{1}{k}$$

وأن :
$$6_x^2 = \sum_{i=1}^{k} ( X_i - U )^2 \cdot \frac{1}{k} = E ( (X_i - U)^2 )$$

وهذا التوزيع يتميز بثبات قيمة الاحتمال . ومثال ذلـــك أن احتمال الحصول على الرقم ١ عند القاء زهرة الطاولة هـــو $\frac{١}{٦}$ وكذلك بالنسبة لبقية الأرقام .

## ٢ - توزيع برنولى The Bernouli Distribution : غالبا

ما يكون لبعض المتغيرات نتيجتين محدودتين ويمكن وضعهمـــا " بالنجاح Sucess " " والفشل Failure " . ويكون الاحتمـــال المتتالى لحدوث كلايهما هو θ - ١ و θ . هذا المتغير يقـال أنه يتبع توزيع برنولى Bernouli. وتكون الدالة الاحتماليـــة (P.F.) للمتغير هى :

حيث أن $x = ٠,١$ و $f ( x ; \theta ) = \theta^x ( 1 - \theta )^{1-x}$

وأن x = عدد مرات النجاح . وعلى ذلك فأن :

$$f ( 0; \theta ) = ١ - \theta$$
$$f ( 1 ; \theta ) = \theta$$

وبذلك تكون المعلمة الوحيدة فى الدالة هى θ .

## ٣ - التوزيع الاحتمالى ذو الحدين :

## The Bionomial Distribution

فى حالة اجراء تجربة تحوى العديد من محاولات برنولى ، افترض أن الاحتمال ثابت وأنه يساوى θ . فاذا كانت هذه المحاولات مستقلة " Independent " ، وكان اهتمامنا فى عدد مرات النجاح فأننا يمكن أن نحصل على ما يسمى بتوزيع ذات الحدين
The Bionmial Distribution

بذلك ، ففى حالة n من المحاولات المستقلة ، يكون عدد مرات النجاح فى عدد المحاولات الكلى هو $\binom{n}{x}$ . ويكون احتمـــــال الحصول على x من النجاح فى من المحاولات المستقلة هو :

$$\binom{n}{x} \theta^x (1-\theta)^{n-x} \quad , \quad x = 0,1,2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots n$$

وهنال جداول للقيمة $\binom{n}{x}$ وهى بصفة عامة تساوى :

$$\binom{n}{x} = \frac{n!}{X!\,(n-X)!}$$

**مثال ١ :** ما هو احتمال أن يشفى ٧ أشخاص من ١٠ أشخاص من مرض معدى ، علما بأن احتمال الشفاء هو ٠,٨ .

**الحل :** فى هذه الحالة $X = 7$ ، $n = 10$ ، $\theta = .80$ . بذلــك يكون الاحتمال هو :

$$b(7;\ 10,\ 0.80) = \binom{10}{7} (0.80)^7 (1 - 0.80)^{10-7}$$

$$= \frac{10!}{7!\,3!} (0.80)^7 (0.20)^3 \doteqdot 0.20$$

**مثال ٢ :** ماهو احتمال الحصول على ٥ أوجه ، ٧ صور فى حالــة القاء عملة متزنة ١٢ مرة .

**الحـل :** فى هذه الحالة $n = 12$ ، $\theta = \frac{1}{2}$ ، $x = 5$. بذلك يكون :

$$b\left(5;\ 12,\ \frac{1}{2}\right) = \binom{12}{5} \left(\frac{1}{2}\right)^5 \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{12-5}$$

$$= \frac{12!}{5!\,7!} \left(\frac{1}{2}\right)^{12} = 792 \left(\frac{1}{2}\right)^{12} = 0.19$$

ويوصف توزيع ذات الحدين ، كأى توزيع آخر بمعلمتين وهما المتوسط U والتباين $6^2$ . ويمكن اثبات أن

$$U_x = n\theta$$
$$6_x^2 = n\theta(1-\theta)$$

<u>الاثبات :</u>

$$U = E(x) = \sum_{x=0}^{n} X \binom{n}{x} \theta^x (1-\theta)^{n-x}$$

$$= \sum_{x=1}^{n} \frac{n!}{(x-1)!\,(n-X)!} \theta^x (1-\theta)^{n-x}$$

وباخراج n ، θ خارج المقدار السابق ، يصبح :

$$U = n.\theta \sum_{x-1}^{n} \binom{n-1}{x-1} \theta^{x-1} (1-\theta)^{n-x}$$

وباعتبار $Y = x-1$ ، $m = n-1$ ، يمكن اعادة كتابة المقدار السابق كالآتى :

$$U = n.\theta \sum_{y-0}^{m} \binom{m}{y} \theta^y (1-\theta)^{m-y} = n.\theta.$$

وذلك لأن

$$\sum_{y-0}^{m} b(y; m; \theta) = 1$$

ولايجاد قيمة $6^2$ ، فأنه من المطلوب ايجاد المقدار $E(X^2)$.
هذا مع ملاحظة أن :

$$E(x^2) = E(X(X-1) + E(X)$$

وقد سبق ايجاد قيمة $E(X)$ . بذلك يكون :

$$E(x(x-1)) = \sum_{x=0}^{n} x(x-1)\binom{n}{x}\theta^{x}(1-\theta)^{n-x}$$

$$= \sum_{x=2}^{n} \frac{n!}{(x-2)!\,(n-x)!}\,\theta^{x}(1-\theta)^{n-x}$$

وايضا باعتبار $y = x-2$ ، $m = n-2$ ، فأن هـذا المقدار يصبح :

$$= n(n-1)\,\theta^{2} \sum_{x=2}^{n} \binom{n-2}{x-2}\theta^{x-2}(1-\theta)^{n-x}$$

$$= n(n-1)\,\theta^{2} \sum_{y=0}^{m} \binom{m}{y}\theta^{y}(1-\theta)^{m-y} = n(n-1)\,\theta^{2}$$

وأيضا فأن :

$$U_2' = E(x^2) = E(x(x-1)) + E(x)$$

$$= n(n-1)\,\theta^{2} + n\theta$$

ويكون :

$$6^{2} = n(n-1)\,\theta^{2} + n\theta - n^{2}\theta^{2}$$
$$= n^{2}\theta^{2} - n\theta^{2} + n\theta - n^{2}\theta^{2} = n\theta - n\theta^{2}$$
$$= n\theta(1-\theta)$$

أيضا جدير بالملاحظة ، أنه فى حالة ما اذا كان المتغير $x$ يتبع ذات الحدين ، فأن $y = \frac{x}{n}$ وتسمى نسبة النجاح Proportion of Sucess له توزيع ذات الحدين بمتوسط $\theta$ وتباين مقـداره $\frac{\theta(1-\theta)}{n}$ . وهذا يوضح أن التباين يقل بمقدار $\frac{1}{n^{2}}$ ، فى هـذه الحالة .

**٤ـ توزيع بواسون The Poisson Dist.** : يعتبر توزيـع

بواسون من أقدم التوزيعات الاحتمالية على الاطلاق . حيث أوجدة الرياضي الفرنسي Simeon Poisson ( ١٧٨١ - ١٨٤٠ ). ولتوزيع بواسون تطبيقات هامة في مجالات جودة الانتاج وخلافه . وتوزيع بواسون هو تقريب جيد لتوزيع ذات الحدين عندما تكون $n \geq 20$، $\theta \leqslant 0.05$ . وعندما تكون $n \geqslant 100$ ، $n\theta \leqslant 10$ ، فأن هذا التقريب يعتبر ممتازا . وتوزيع بواسون يعتبر توزيعا محددا Limiting Distribution لتوزيع ذات الحدين ، بيد أن له تطبيقات عديدة ليس لها صلة بتوزيع ذات الحدين .

ويستخدم توزيع بواسون لتقدير الاحتمال عندما يصعب تقديرة باستخدام ذات الحدين . فعندما تؤول $n$ الى $\infty$ ، $\theta$ صغيرة حيث تؤول الى الصفر ، $n\theta$ ثابتة . فأن $n\theta = \lambda$ = ثابت . وبالتعويض في دالة التوزيع الاحتمالي لذات الحدين :

$$b(X ; n, \theta) = \binom{n}{x} \cdot \left(\frac{\lambda}{n}\right)^x \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-x}$$

ويكون التوزيع المحدد هو :

$$P(X ; \lambda) = \frac{\lambda^x \cdot e^{-\lambda}}{X!}$$

حيث أن $X = 0,1,2 \ldots\ldots\ldots\ldots$

**مثال :** اذا كان احتمال حضور فرد ما معرض الكتاب هو ٠٠٥,- ما هو احتمال أن ١٨ فردا من ٣٠٠٠ مقيميين في مدينة ما سوف يحضرون هذا المعرض .

الحل : $X = 18$ ، $\lambda = n\theta = 3000(0.005) = 15$

وبالتعويض

$$P(18,15) = \frac{(15)^{18} \cdot e^{-15}}{18!} = 0.0706$$

وهناك جداول خاصة يمكن استخدامها لاستخراج هذا الاحتمال.
ملحق رقم ( ٥ ) . كذلك فأن $\lambda = U = 6^2$

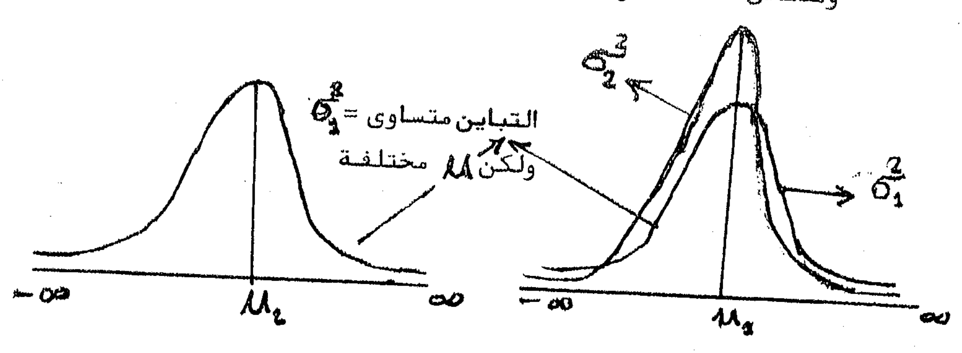
## ب - التوزيعات الاحتمالية المستمرة

## Continuous Probability Distributions

### ١ - التوزيع الطبيعـــى

### Normal Distribution

يعتبر التوزيع الطبيعى Normal Distribution من أهم التوزيعات الاحتمالية وأكثرها شيوعا - وهو تقريب جيد لكل هذه التوزيعات تحت شروط معينة - والتوزيع الطبيعى ظاهرة من ظواهر الحياة . ويطلق عليه أيضا Gaussian Dist . نسبة الـــى جاوس والذى حدد العديد من الخواص الرياضية لهذا التوزيـــع . وهناك بصفة عامة معلمتين ذات أهمية خاصة وهما المتوســط U والتباين $6^2$ . وتحدد U مكان التوزيع ويحدد $6^2$ شكل التوزيـــع . الشكل البيانى رقم (١٣) . والمنحنى الطبيعى ناقوس الشكل ومتماثل . كما هو بالشكل رقم (١٣) .




شكل رقم (١٣)

ويجب التفريق بين ما يسمى بالملاحظة Single Observation وبين المتوسط $\bar{X}$. وبصفة عامة فأن لو أن :

$$X \sim N(U, 6^2)$$

حينئذ

$$Z = \frac{X - U}{6} \sim N(0,1)$$

و Z هى التوزيع الطبيعى القياسى Standard Normal Dist. وتختصر هذه العبارة (S T N) . ويكون التوزيع القياسى المقابـــل لتوزيع X متوسطة صفر وتباينة $6^2 = 1$ . وتكون دالة التكثيـــف الاحتمالى أو ( P.d.f. ) Probability Density Function لكل من X ، Z هى :

$$F(X) = \begin{cases} \frac{1}{6\sqrt{2\pi}} \cdot \exp - \frac{1}{2}\left(\frac{X-U}{6}\right)^2 & \text{for } -\infty < X < \infty \\ & 6 > 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

وتكون p.b.f. لـ Z هى :

$$f(Z) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \cdot \frac{-Z^2}{2} & \text{for } -\infty < Z < \infty \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

ويكون الفارقبينهمهو أنه فى حالة التوزيع القياسى تكون صفر =U
$6^2 = 1$ كما سبق الاشارة .

## توزيع متوسط العينة :

## The Sampling Dist.of the Sample Mean :

لأى مجموعة من الملاحظات $X_n \, ........... \, X_1, X_2$ فأن :

متوسط العينة = Sample Mean = $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$

ومن معلومات الطالب فأن :

متوسط المجتمع = $U = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} X_i$

وأن

$$6^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} ( X_i - U )^2$$

وغالبا ، فأننا نقدر معالم المجتمع ، بتقديرات العينة والتى يجب أن تكون تقديرات غير متحيزة وكافية ومتسقة . ولسنا بصدد الخوض فى هذه المفاهيم على هذا المستوى . وبصفة فأن $\bar{X}$ هــو تقدير غير متحيز للمعلمة U كما سبق الاشارة .

وأن

$$\hat{6}^2 = \hat{V}(X) = S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} ( X_i - \bar{X} )^2$$

هو تقدير لـ $6^2$. ولقد سبق شرح سبب القسمة على n - 1 حيـث أنه يساوى عدد الملاحظات المستقلة n ناقص عدد المعالم المقدرة وفى هذه الحالة u أى معلمة واحدة . وهذا ما يطلق عليه درجات الحرية D.f. .

وتوزيع $\bar{x}$ هو

$$\bar{X} \sim N \left( U, \frac{6_x^2}{n} \right)$$

والتوزيع القياسى المقابل هو :

$$Z = \frac{\bar{X} - U}{\frac{6_x}{\sqrt{n}}} \sim N ( 0,1)$$

وبديهيا ، فبتقدير $6_x$ بالقيمة S ، فأنه يمكن الحصول على $S_{\bar{x}}$ كتقدير للقيمة $6_{\bar{x}}$ .

وهناك جداول خاصة لقيم Z ، ملحق رقم ( ٢ ) .

**مثال :** اذا علمت أن ( $X \sim ND(500,10000)$ . وهذا هو التوزيع الذى أمكن الحصول عليه فى أحد الامتحانات . أوجد عدد الطلاب الذين حصلوا على درجات بين 545,619 اذا علمت أن اجمالى عدد الطلاب هو ٥٠ طالبا .

**الحل :**

$$Z_{545} = \frac{545 - 500}{100} = 0.45$$

$$Z_{619} = \frac{619 - 500}{100} = \frac{119}{100} = 1.19$$

وبفحص جدول Z يمكن الحصول على الاحتمال المقابل . وبالضرب فى N = 50 نحصل على الاجابة وهى :

عدد الافراد = ( 50 ) ( 0.1736 ) = 8.66 يعنى نحو ٩ أفراد .

وما سبق يعتبر صحيحا ، بفرض أن هناك معلومات كافية عن التوزيع . فببساطة يمكن القول أن ما أشتق من توزيع طبيعى فهو طبيعى ، أخذا فى الاعتبار أن الشروط المحددة The Limiting Conditions تعتبر مستوفاة . وبفرض أنه ليس هناك معلومات كافية عن التوزيع ، فأن هناك وسائل مساعدة لمعرفة توزيع المتوسط ومنها ما يطلق عليه نظرية الحدود المركزية "Central Limit Theorm " أو "CLT" . وتنص هذه النظرية أنه بافتراض أن متوسط المجتمع هو $U_x$ وأن تباينة هو $6_x^2$ . وأخذت عينات من حجم n لكل منها ، فأن توزيع المتوسطات طبيعى بمتوسط $U_{\bar{x}} = U_x$

، وتباين $6^2_{\bar{x}} = \frac{6^2_x}{n}$ وهذا يعنى أنه حتى لو أن المفردات غير موزعة توزيعا طبيعيا فأنه فى حالة العينات الكبيرة يمكن اللجوء الى C L T للحصول على هذا التقريب .

وبافتراض أن :

$$\bar{X} \sim N \left( U_{\bar{x}} \quad , \frac{6_x}{n} = 6_{\bar{x}} \right)$$

فأن قيمة $Z$ المقابلة هى :

$$Z = \frac{X - U_{\bar{x}}}{6_{\bar{x}}} \sim N \; (0,1)$$

وبذلك لم نتطلب أن تكون $( X \sim ND ( U , 6^2 )$ . بذلك يمكن القول أنه يمكن الللجوء الى C L T فى حالة العينات الكبيرة حتى ولم يكن لدينا معلومات عن توزيع x أو لو كانت x غير موزعة توزيعا طبيعيا . وهذه من أهم النظريات المحددة في الاحصاء .

**مثال ١:** سحبت عينة من حجم $n = 36$ من مجتمع متوسطه $U = 110$ وانحراف معيارى $6_x = 18$ . فاذا تم تقدير متوسط هذه العينة $\bar{X} = 120$ . أوجد قيمة $Z$ .

**الحل :** يلاحظ أننا لم نحدد أن المفردات موزعة توزيعا طبيعيا.

$$Z = \frac{X - U}{\frac{6_x}{\sqrt{n}}} = \frac{120 - 110}{\frac{18}{6}} = 3.33$$

**مثال ٢:** سحبت ١٠٠ عينة من حجم $n = 50$ من مجتمع متوسطة $U_x = 75$ وتباينه $6^2_x = 12$ . ماهو توزيع متوسط أى عينة منهم ؟

**الحــل :** فى هذه الحالة $75 = U_x = U_{\bar{x}}$ ، وأن

$$6^2_{\bar{x}} = \left(\frac{6_x}{\sqrt{n}}\right)^2 = \frac{12}{50} = 0.24$$

ويكون توزيع متوسط العينة $\bar{x}$ هو :

$$\bar{X} \sim ND(75, 0.24)$$

**توزيع الفرق بين متوسطات العينات :**

Difference between S. Means

فى كثير من الأحيان ، يكون الهدف هو مقارنة الفرق بيـــن متوسطى عينتين . ففى حالة هذه الحالة ، نفترض أن لدينا عينتين ، وتم سحب كلاهما بطريقة مستقلة عن الأخرى . وكانت العينة الأولى مسحوبة من مجتمع طبيعى متوسطة $U_{x1}$ وتبانية $6^2_{x1}$ . وكانـــت العينة الثانية مسحوبة من مجتمع آخر مفرداته موزعة توزيعـــا طبيعيا بمتوسط $U_{x_2}$ وتباين $6^2_{x_2}$ . فأن الفرق بين متوسطـــى العينتين $X_1 - X_2$ موزعا توزيعا طبيعيا بمتوسط

$$U_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} = U_{x_1} - U_{x_2}$$

ويكون الخطأ المعيارى ( $S_e$ ) هو :

$$6_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} = \sqrt{\frac{6^2_{\bar{x}1}}{n_1} + \frac{6^2_{\bar{x}2}}{n_2}}$$

أو أن :

$$\bar{X}_1 - \bar{X}_2 \sim ND\left(U_{x_1 - x_2}, \sqrt{\frac{6^2_{x1}}{n_1} + \frac{6^2_{x_2}}{n_2}}\right)$$

مع ملاحظة أن هذه الصيغة يمكن تحويرها لحالة ما اذا كـــان $n_1 = n_2$ أو $6^2_{x1} = 6^2_{x_2}$ .

**مثال :** فى امتحان مادة الاحصاء ، تم سحب عينة من ٣٢ طالبا وعينة من ٣٢ طالبة . فاذا علمت أن متوسط المجتمع هو ٥٠ وأن الخطأ المعيارى هو ١٠ . ما هو احتمال أن يكون متوسط درجات البنات أعلى من متوسط درجات البنين بمقدار ٥ درجات .

**الحل :** بفرض أن

متوسط درجات البنات $= \bar{X}_f$

حجم العينة من البنات $= n_f$

متوسط درجات البنين $= \bar{X}_m$

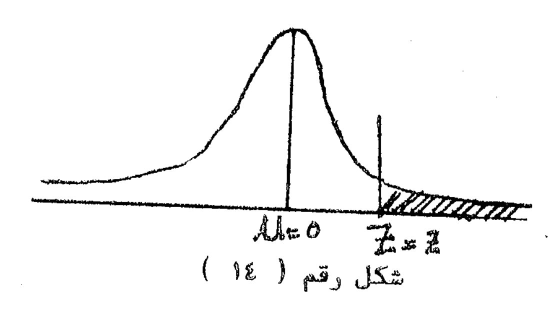
حجم العينة من البنين $= n_m$

وأن $\bar{X}_f - \bar{X}_m =$ هو الفرق بين المتوسطين . لاحظ أن $0=50-50=$ $U_{\bar{x}_f} - U_{\bar{x}_m}$ ، وأن

$$6_{\bar{x}_f - \bar{x}_m} = \sqrt{\frac{(100).2}{32}} = \frac{5}{2} = 2.5$$

نحسب $Z$ المقابلة وهى :

$$Z = \frac{(\bar{X}_f - \bar{X}_m) - U_{\bar{x}f - \bar{x}_m}}{6_{\bar{x}_f - \bar{x}_m}} = \frac{5-0}{2.5} = 2.0$$




شكل رقم ( ١٤ )

كما أن العدد الكلى هو ٦٤ طالبا ، بذلك يمكن الحصول على عدد الطالبات اللآتى يزيد متوسط درجاتهم عن متوسط درجات الطلاب بخمسة درجات كلآتى :

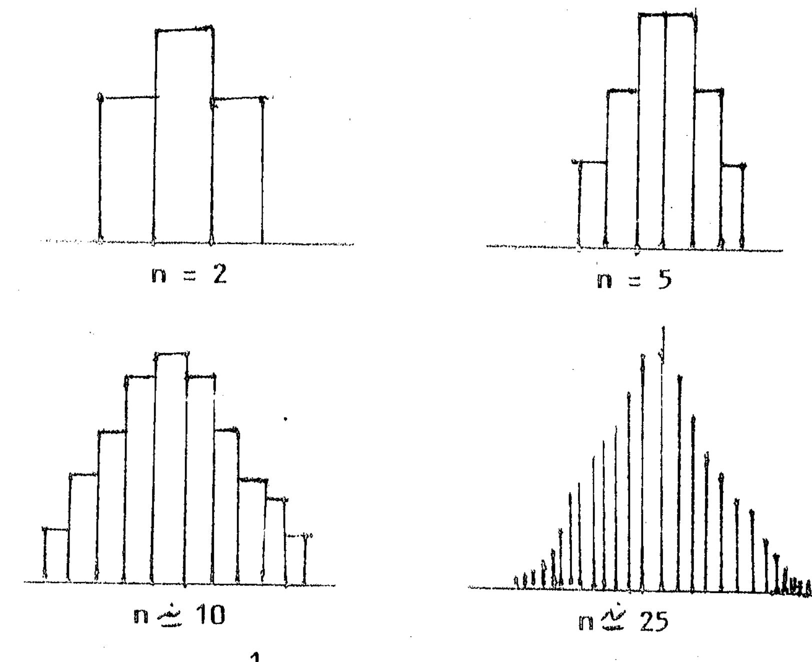
عدد الطالبات = ( n ) ( P(Z) ) = (64) (0.0228) ≐ ٢

وللتوزيع الطبيعى العديد من الخواص ذات الأهمية التطبيقية ، كما أنه أساس توزيعات أخرى مثل نسبة ـ ت ، نسبة ـ ف وغيرها كما سيتم شرح ذلك . هذا بالاضافة الى أن المدى $\bar{X} + k\,s$ ، $\bar{X} - k\,S$ حيث k ثابت له أهمية خاصة كما سبق الاشارة . هذا فضلا عن أن هناك جداول خاصة لاستخراج المساحات المختلفة تحت المنحنى أو الاحتمال المقابل ، جدول رقم ( ٢ ) بالملحق . ويمكن للطالب ممارسة استخدام هذه الجداول فى الدروس العملية .

وأهم ما يجب أن نلفت النظر اليه فى هذا المجال هو أنه عندما تصبح n أو عدد المحاولات Trials كبير فى حالة توزيع ذات الحدين ، وتكون θ مقاربة من ½ ، فأنه التوزيع الطبيعى يصبح تقريبا لتوزيع ذات الحدين . فمع زيادة n يصبح توزيع ذات الحدين متماثلا ، وفاقوس الشكل تقريبا . وبذلك تكون :

$$Z = \frac{X - n\theta}{\sqrt{n\theta(1-\theta)}}$$

وهذه القيمة هى Z عندما تؤول n الى ما لا نهاية . ولسنا بصدد اثبات ذلك على هذا المستوى ، الشكل رقم (١٥) .




شكل رقم (١٥) : تقريب توزيع ذات الحدين ، $\theta = \frac{1}{2}$ ، n مختلفة .

## توزيعات العينة

## Sampling Distributions

سبق أن أشرنا الى متوسط العينة ، وتباين العينة والاحصاءات الأخرى . وكذلك توزيع المتوسط فى حالة ما اذا كانت المفردات مسحوبة من مجتمع غير محدد Infinite . وفى هذا الجزء سنستعرض بعض التوزيعات ذات الأهمية ومنها :

### أ - توزيع - ت

### t - Distribution .

بنى توزيع - t أو نسبة - ت - على أساس أن المجتمع الذى

سحبت منه العينة موزعا توزيعا طبيعيا ( Normality ) - وأنه تم سحب عينات صغيرة عشوائيا من هذا المجتمع Random Selection ، وأنه يمكن حساب الخطأ المعيارى لكل من هذه العينات . وبذلك تكون :

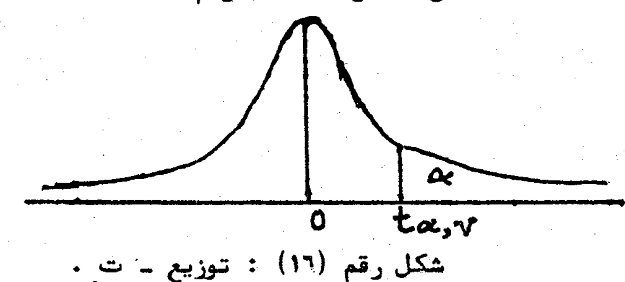
$$t = \frac{Z}{\sqrt{X^2_{df} / df}} \sim t_{df}$$

حيث أن $X^2$ هى مربع - كاى Chi- Square. هذا مع ملاحظة أن كل من $Z$ فى البسط ، $X^2$ فى المقام مستقلين. كذلك فيمكن القول أنه يمكن اثبات أهم معالم هذا التوزيع وهى $U, 6^2$. بيد أن هذه المحاضرات هى للطالب المبتدأ. وبصفة عامة فأن

$$\hat{V}(t) = \text{تباين } t \text{ المقدر} = \frac{df}{df-2}$$

حيث أن $df>2$ ، وأن $df$ هى درجات حرية $t$ . ويلاحظ أنه كلما كبرت $df$ - على سبيل المثال تقترب من ٣٠ ، كلما اقترب تباين $t$ من الواحد الصحيح ، أو أن توزيع $t$ اقترب من التوزيع الطبيعى . وتوزيع $t$ هو توزيع العينات الصغيرة بصفة عامة .

**ويماثل توزيع $t$ التوزيع الطبيعى القياسى . بيد أن تباين $t$ أكبر من تباين $Z$. ويكون هذا التباين مقداره الواحد الصحيح بكبر حجم العينة كما سبق الاشارة ، شكل رقم (١٦) .**




شكل رقم (١٦) : توزيع - ت .

**نظرية :** اذا كان $\bar{X}$ ، $S^2$ هما متوسط وتباين عينة عشوائية من حجم " n " مسحوبة من مجتمع طبيعى متوسطة U وتباينه $6^2$ ، فأن :

$$t = \frac{\bar{X} - U}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \sim t_{(n-1)}$$

**الاثبات :** سبق أن أشرنا الى أن بسط t هو :

$$Z = \frac{\bar{X} - U}{\frac{6}{\sqrt{n}}}$$

وأن المقام هو $X^2$ أى $\frac{(n-1)\,S^2}{6^2}$ . ولو أن البسط والمقام مستقلين ، فأن

$$t = \frac{\frac{\bar{X} - U}{6/\sqrt{n}}}{\sqrt{\frac{(n-1)S^2}{6^2} \Big/ (n-1)}} = \frac{\bar{X} - U}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$$

**مثال :** عينة من حجم n= 12 سحبت من مجتمع متوسطة U = 12 . وحسب $\bar{X}$ لهذه العينة فكان $\bar{X}$= 16.40 ، وحسب S فكان S = 2.1 . ما هى قيمة t

$$t = \frac{\bar{X} - U}{\frac{S}{\sqrt{n}}} = \frac{16.40 - 12}{\frac{2.1}{\sqrt{12}}} = 8.38$$

هذا مع ملاحظة أنه هناك جداول خاصة لقيم t ، لدرجات حرية مختلفة ومستوى معنوية مختلف ، جدول رقم ( ٣ ) بالملحق. وقد

بنيت هذه الجداول على أساس قيم ذالة التكثيف الاحتمالى لـــ t وسيلى شرح ذلك فى باب اختيار الفروض الاحصائية .

## ب - مربع كـــاى

## Chi - Square ( $X^2$ )

مربع كاى $X^2$ له تطبيقات عديدة فى مجالات عديدة مـــن العلوم الاجتماعية والوراثة .... الخ . ولمربع كاى عدة فـــروض أساسية . وهى :

١- أن تكون كل المفردات مستقلة ولها نفس فرصة الظهور فـــى العينة .

٢- أن تكون هذه المفردات مسحوبة من مجتمع طبيعى .

وتوزيع كاى - هو أساس توزيعات أخرى كثيرة - ويستخدم فى مقارنة التكرارات الفعلية مع التكرارات المتوقعة ، واختبار استقـــلال المتغيرات ، .. وغيرها . وبصفة عامة فأن :

$$X^2 = \frac{(n-1)S^2}{6^2}$$

وهناك العديد من النظريات ذات الأهمية - والمرتبطة بتوزيع مربع كاى ومنها :

**نظرية ١:** $X^2$ لدرجة حرية واحدة هو يساوى $Z^2$ .

**نظرية ٢:** لعدد مقدارة n من المتغيرات العشوائية المستقلــــة $X_1 , X_2 , \ldots X_n$ والتى يمثل كل منها توزيع طبيعـــى قياس فأن

$$y = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 \sim X_n^2$$

**الاثبات :** ببساطة يمكن القول أن :

$$y = Z_1^2 + Z_2^2 \cdots\cdots Z_n^2 = \sum_{i=1}^{n} Z_i^2$$

$$= X_1^2 + X_1^2 \cdots\cdots X_1^2 = X_n^2$$

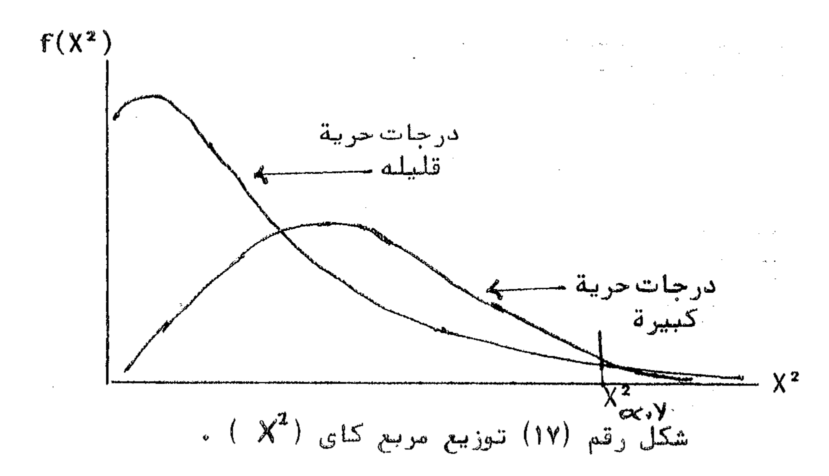
نظرية ٣ : لعدد مقداره $n$ من المتغيرات العشوائية المستقلة ، وأن كل من هذه المتغيرات موزعا $X^2$ بدرجات حرية $\nu_1, \nu_2, \cdots \nu_n$ ، فأن

$$y = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim X^2_{\nu_1 + \nu_2 \cdots\cdots \nu_n}$$

أى أن المجموع له توزيع مربع كاى بدرجات حرية $\nu_1, \nu_2 \cdots \nu_n$ أى $X^2$ يمكن جمعها - وهذه صفة الجمع فى $X^2$ ، وتوزيع $X^2$ غير متماثل - ولكن عندما تزيد درجات الحرية ، فأن التوزيع يقترب من التوزيع الطبيعى القياسى ، شكل رقم (١٧) . وبصفة عامة فأن

متوسط $X^2 = df =$ درجات الحرية

تباين $X^2 = 2df =$ ضعف درجات الحرية .




شكل رقم (١٧) توزيع مربع كاى ( $X^2$ ) .

## ج - توزيع - ف

## F - Distribution

توزيع F أو نسبة - ف ، لها أهمية خاصة نظرا لشيوع تطبيقاتها بين مختلف فروع العلم . وأساس توزيع F . التوزيع الطبيعي . وبصفة عامة تتوزع F بنى على فروض أساسية منها :

١- أن F هي نسبة بين مربعي كاي ، وبذلك يجب أن مجتمعي $X^2$ في البسط والمقام مستقلين ولهما نفس التباين .

٢- السحب العشوائي عن مجتمع طبيعي .

وبصفة عامة يمكن كتابة نسبة - ف على أنها :

$$F = \frac{X_1^2/df_1}{X_2^2/df_2} \sim F_{\&,(df_1,df_2)}$$

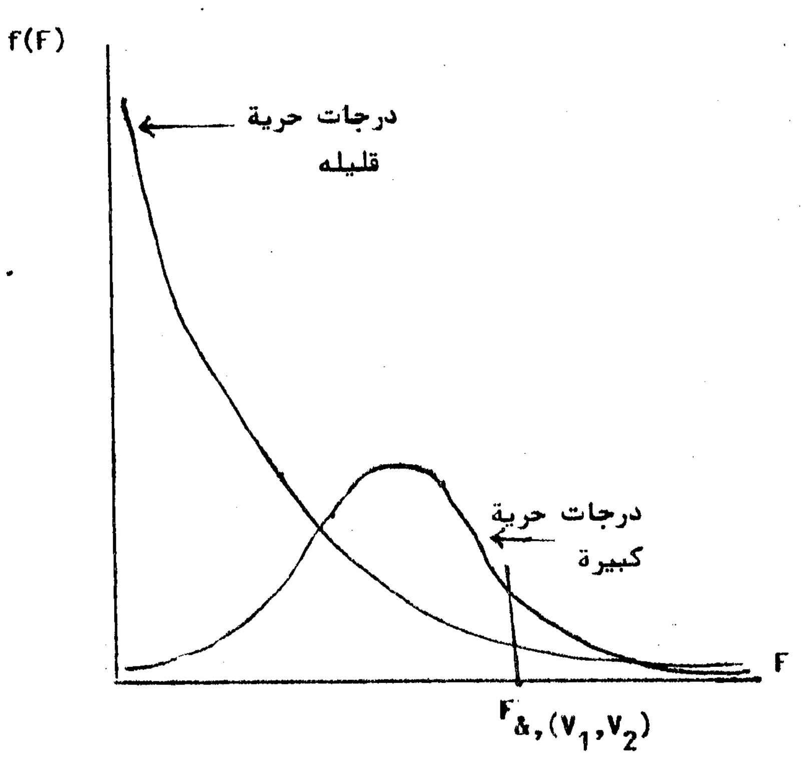
$$= \frac{6_1^2\ X^2_{(n_1-1)}/(n_1-1)}{6_2^2\ X^2_{(n_2-1)}/(n_2-1)} = \frac{(n_1-1)\ S_1^2/(n_1-1)}{(n_2-1)\ S_2^2/(n_2-1)} \doteq \frac{S_1^2}{S_2^2}$$

بافتراض أن $6_1^2 = 6_2^2$ . وأن $S_1^2 > S_2^2$

وبفرض أن $6_1^2 \neq 6_2^2$ ، فأن نسبة - ف هي :

$$F = \frac{S_1^2/6_1^2}{S_2^2/6_2^2} = \frac{6_2^2\ S_1^2}{6_1^2\ S_2^2} \sim F\ (n_1-1),(n_2-1)$$

ويماثل توزيع F توزيع مربع كاي ( $X^2$ ) . ويختلف عن توزيع t ، Z .




**شكل رقم (١٨) توزيع - ف**

ومن أهم استخدامات F بجانب تحليل التباين هو اختبار ما اذا كان $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ ، أو تجانس التباين . وأيضا ، فأنه من السهل اثبات أن

$$F_{1,V_2} = t^2$$

وذلك لأن :

$$F_{1,V_2} = \frac{X_1^2/1}{X_2^2/V_2} = \frac{Z^2}{X_2^2/V_2}$$

$$= \frac{(X_i - U)^2 / \sigma_1^2}{\frac{(n-1)\, S_2^2}{\sigma_2^2} \Big/ (n-1)}$$

حينئذ ، بفرض أن $6_2^2 = 6_1^2$ ، فأن

$$= \frac{(X-U)^2}{S_2^2} = t^2$$

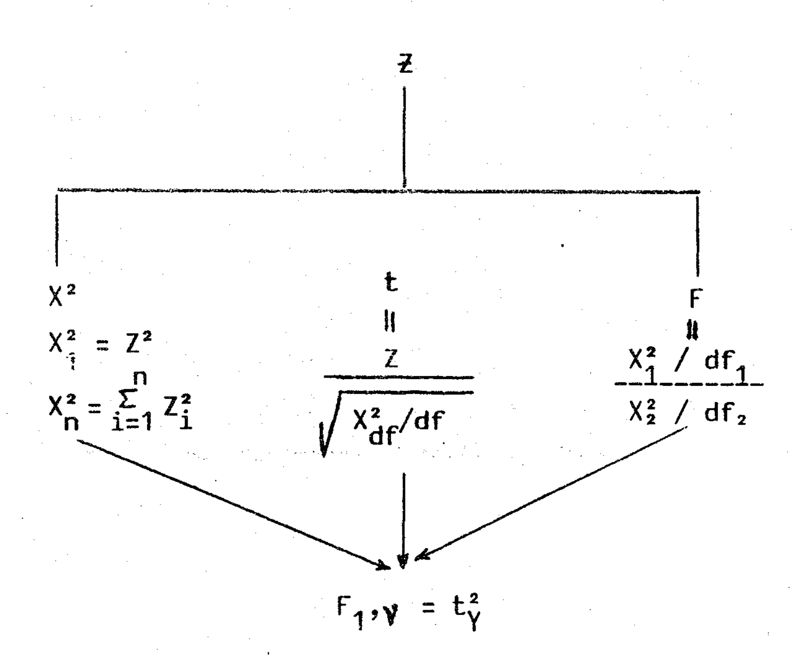
ولكن اثبات ذلك أيضا باعتبار أن :

$$t = \frac{Z}{\sqrt{X_{df}^2/df}} =$$

بذلك تكون :

$$t^2 = \frac{Z^2}{X_{df}^2/df}$$

ويوضح الشكل رقم (١٩) ، العلاقة بين التوزيعات السابقة . وأن توزيع Z هو الأب أو Parent لكل هذه التوزيعات .




شكل رقم (١٩) : العلاقة بين توزيعات Z ، t ، F ، $X^2$ .

## تمارين

(١٦) أوجد المساحة تحت المنحنى المعتدل لكل مما يلى :

أ - بين $Z = 1.2$ , $Z = 0$

ب - بين $Z = 0$ , $Z = -0.68$

جـ - بين $Z = 2.21$ , $Z = -0.46$

(١٧) أوجد احتمال الحصول على ٣ - ٦ أوجهه فى عشرة قذفات لعملة غير متميزة باستخدام توزيع ذات الحدين ، وباستخدام تقريب ذات الحدين بالتوزيع الطبيعى .

(١٨) اذا تبين أن احتمال أن فرد ما سيعانى من تأثير سىء من الحقن بأحد الأمصال هو ٠٠١, . أوجد احتمال أن بالضبط ٣ أفراد من ٢٠٠٠ فرد سيعانون من هذا التأثير ، واحتمال أن أكثر من فردين سيعانون من هذا التأثير .

(١٩) افترض أن هناك مصنعين لصناعة اللمبات الكهربائية . المصنع A يصنع لمبات متوسط عمرها ١٤٠٠ ساعة ، والانحراف المعيارى لها هو ٢٠٠ ساعة . بينما يصنع المصنع B لمبات متوسط عمرها هو ١٢٠٠ ساعة ، والانحراف المعيارى لها هو ١٠٠ ساعة . فلو تم سحب عينتين عشوائيتين من حجم ١٢٥ لمبة من كل منهما - وتم اختبارها . ما هو احتمال اللمبات من مصنع A سيكون متوسط عمرها على الأقل ( أ ) ١٦٠ ساعة ، ( ب ) ٢٥٠ ساعة أكثر من عمر اللمبات المصنوعة فى المصنع B .

## الباب السابع

## التقدير الاحصائى

## Stat. Estimation.

ينقسم الاستقراء الاحصائى Statistical Inference الى مشكلة التقدير Estimation Problem واختيار الفروض الاحصائية Testing of Stat . Hypotheses . وينحصر التقدير الاحصائى فى اختيار قيمة لمعلمة ما من بين كل البدائل الممكنه . بينما ينحصر اختبار الفروض فى اتخاذ قرار بشأن رفض Rejection أو قبول Acceptance قيمة معينة أو مجموعة من القيم للمعلمه .

## التقدير النقطى

## Point Estimation

عندما تستخدم الاحصائية كتقدير للمعلمة ، يطلق على هذا تقدير النقطة للمعلمة . وتعتبر هذه الاحصائية تقدير للمعلمة ويقال عنها Estimator . فعلى سبيل المثال تعتبر الاحصائية $\bar{x}$ تقدير لمتوسط المجتمع U . وقيمة $\bar{x}$ هى تقدير نقطة Point Estimate للمعلمة U . وكذلك فقيمة $S^2$ هى تقدير نقطة للمعلمة $6^2$ . وسوف نوالى فى الاجزاء القادمة كلا من طرق التقدير ، وخصائص التقدير الاحصائى .

### أولا : طرق التقدير

هناك بصفة عامة أربعة طرق من طرق التقدير . وهذه الطرق تختلف عن بعضها البعض . فمنها ما يعتمد على معرفة طبيعة الدالة الاحتمالية أو دالة التكثيف الاحتمالى للمتغير موضع الدراسة - كطريقة تعظيم الدالة الاحتمالية . بينما بعضها الآخر لا يعتمد على

معرفة التوزيع للمتغير موضع الدراسة مثل طريقة العزوم - وطريقة المربعات الدنيا - مثلا . وسوف نوالى شرح هذه الطرق كما يلى :

## ٧-١- طريقة العزوم

## Ordinary Moments

طريقة العزوم تعتبر من أقدم طرق التقدير على الاطلاق . وهذا هو الدافع الى كتابة كلمة Ordinary كعنوان لهذه الطريقة - بدلا من الترجمة الحرفية للمعنى باللغة العربية . وهذه الطريقة تعتمد على مساواة العزوم الأولى للمجتمع بمثيلتها المقدرة من العينة . بذلك نحصل على بعض المعادلات المطلوب حلها فى معالم المجتمع الغير معروفة القيمة .

فاذا كان لدينا مجموعة من الملاحظات $X_1, X_2 \ldots\ldots X_n$ فأن العزم K للعينة هو :

$$m'_k = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^k}{n} \qquad (١)$$

وتعتمد طريقة العزوم على حل مجموعة من المعادلات :

$$m'_k = U'_k \quad ; \quad K = 1,2 \ldots\ldots\ldots\ldots P \qquad (٢)$$

وذلك لعدد p معلمة من معالم المجتمع . من ذلك نخلص الى أن $\bar{x}$ هو تقدير للمعلمة U وفقا لهذه الطريقة . وبنفس الطريقة يمكن الحصول على تقدير للمعلمة $6^2$ .

## ٧-٢- طريقة المربعات الدنيا

## Method of Least-Squares

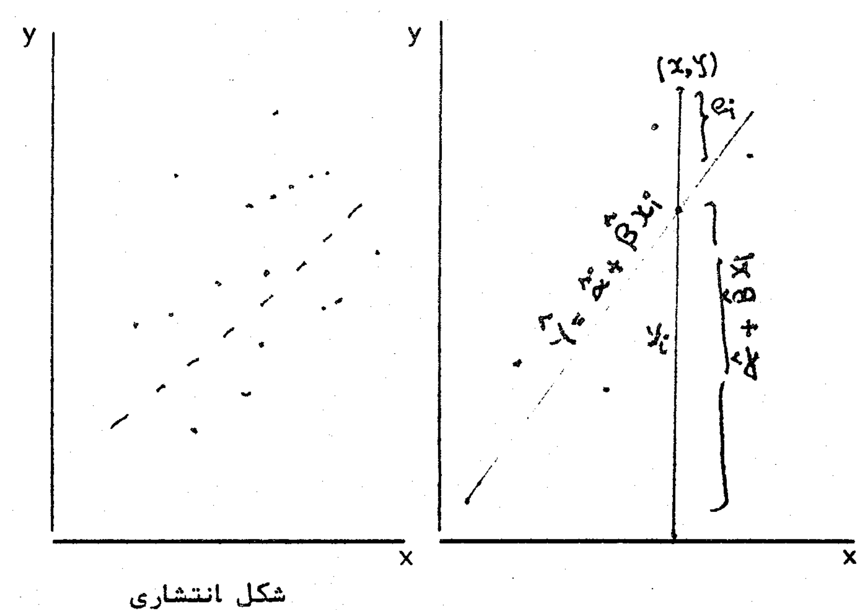
طريقة المربعات الدنيا هى بصفة عامة طريقة توفيق المنحنيات التى أقترحها فى بداية القرن التاسع عشر الرياضى الفرنسى

Adrien Legendre - وقد بينت هذه الطريقة على أنه فى حالة وجود أزواج من القيم ( $( X_i , y_i ) ; i = 1,2 \ldots\ldots n$ ) ، فأنه تقديرات المربعات الدنيا لمعالم الانحدار هى القيم $\hat{B}$ , $\hat{\alpha}$ والتى تدنى :

$$Q = \sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \sum_{i=1}^{n} ( Y_i - ( \hat{\alpha} + \hat{B} X_i ) )^2 \qquad (٣)$$

ويطلق على هذه التقديرات $B_{(OLS)}$ حيث أن OLS هى اختصار للمعنى Ordinary Least - Squares . وعموما فأنه نود أن نحصل على $\hat{B}$ , $\hat{\alpha}$ حيث أن :

$$\phi ( \hat{\alpha} , \hat{B} ) \leqslant \phi ( \alpha , B ) \qquad (٤)$$




شكل انتشارى
Scather Diagram
شكل رقم (٢٠) . بيان العلاقة بين x,y

وباجراء التفاضل الجزئى للمعادلة (٣) ، ومساواة التفاضلات الجزئية بالصفر ، ينتج :

$$\left.\frac{\partial Q}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=\hat{\alpha}} = \sum_{i=1}^{n} (-2)\ (y_i - (\hat{\alpha} + \hat{B}\ X_i)\ ) = \text{صفر} \qquad (٥)$$

$$\left.\frac{\partial Q}{\partial \beta}\right|_{\beta=\hat{\beta}} = \sum_{i=1}^{n} (-2) X_i\ (y_i - (\hat{\alpha} + \hat{B} X_i)\ ) = \text{صفر} \qquad (٦)$$

من المعادلات (٥) ـ (٦) نحصل على المعادلات الطبيعية Normal Equations وهى :

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = n\hat{\alpha} + \hat{B} \sum_{i=1}^{n} X_i \qquad (٧)$$

$$\sum_{i=1}^{n} X_i y_i = \hat{\alpha} \sum_{i=1}^{n} X_i + \hat{B} \sum_{i=1}^{n} X_i^2 \qquad (٨)$$

أو أن :

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} y_i \\ \sum_{i=1}^{n} X_i y_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} X_i \\ & \sum_{i=1}^{n} X_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\alpha} \\ B \end{bmatrix} \qquad (٩)$$

حيث أن $a_{12} = a_{21}$ فى مصفوفه x . وبالحل باستخدام قاعدة كريمر نحصل على

$$\hat{B}_{y.x} = \frac{n.(\sum_{i=1}^{n} X_i y_i) - (\sum_{i=1}^{n} X_i)(\sum_{i=1}^{n} y_i)}{n.(\sum_{i=1}^{n} X_i^2) - (\sum_{i=1}^{n} X_i)^2}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2} \qquad (١٠)$$

وأن

$$\hat{\alpha} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i - \hat{B} \sum_{i=1}^{n} X_i}{n} = \bar{y} - \hat{B}\,\bar{X} \qquad (١١)$$

وجدير بالملاحظة أن $\hat{B}$ هى معامل الانحدار Regression Coefficient ويطلق عليه معامل انحدار y على x . أو معامل الانحدار البسيط أو الانحدار الخطى البسيط . وببساطة فأنه يمكن القول أن المعادلة :

$$y = \alpha \pm B\,X \qquad (١٢)$$

هى صورة رياضية مؤكدة Deterministic Form . بينما الصورة

$$y = a + B\,X + e \qquad (١٣)$$

حيث أن $e$ هى الخطأ العشوائى Random Error ، هى علاقة احتمالية احصائية Probabilistic Form . وعادة ما يفترض الباحث عدة فروض لتقدير تلك العلاقة وهى أن :

١ - x ثابتة ( Fixed ) .

٢ - $e \sim N \quad (0,1)$

٣ - Cov $(e,x)$ = صفر

وسوف نوالى شرح هذه الفروض فى اجزاء لاحقة . أيضا يتضح أن
y أصبحت متغيرا عشوائيا . لأنها دالة فى e . وغالبا ما يطلـــق
على X المتغير المستقل Independent Variable ويطلق علـــى
y المتغير التابع Dependent Variable . كذلك فأنه يمكن تقدير
معامل انحدار X على y . وأن هناك علاقة بين هاذين المعامليـــن
ومعامل الارتباط Correlation Coefficient كما سيأتى ذكـره
فيما بعد .

مثال : البيانات التالية توضح العلاقة بين عدد الساعات التى قضاها
١٠ طلاب فى السنة الثانية فى مذاكرة مادة الاحصاء وبيـــن
درجات الامتحان النهائى لهذه المادة .

| عدد الساعات X | درجات الطلاب y |
|---|---|
| ٤ | ٣١ |
| ٩ | ٥٨ |
| ١٠ | ٦٥ |
| ١٤ | ٧٣ |
| ٤ | ٣٧ |
| ٧ | ٤٤ |
| ١٢ | ٦٠ |
| ٢٢ | ٩١ |
| ١ | ٢١ |
| ١٧ | ٨٤ |

احسب معامل انحدار y على X ؟

**الحل :** n = ١٠ ، $\sum_{i=1}^{10} X$ = ١٠٠ ، $\sum_{i=1}^{10} X^2$ = ١٣٧٦ ، $\sum_{i=1}^{10} Y$ = ٥٦٤ ، $\sum_{i=1}^{10} Xy$ = ٦٩٤٥ ، بذلك :

$$\hat{B} = \frac{n \sum_{i=1}^{10} x_i y_i - (\sum_{i=1}^{10} x_i)(\sum_{i=1}^{10} y_i)}{n (\sum_{i=1}^{10} X^2) - (\sum_{i=1}^{10} X_i)^2} = \frac{(١٠٠)\ (٥٦٤) - (٦٩٤٥)(١٠)}{^٢(١٠٠) - (١٣٧٦)(١٠)} = ٣,٤٧$$

وأن

$$\hat{\alpha} = \bar{y} - \hat{B}\,\bar{X} = 56.4 - (3.47)(10) = 21.69$$

بذلك تكون صورة العلاقة المقدرة وفقا لهذه الطريقة هى :

$$\hat{Y}_i = 21.69 + 3.47\ X_i$$

ويمكن التعويض فى هذه المعادلة بقيم مختلفة لـ x للحصـــول على قيم $Y_i$ المقدرة . وجدير بالملاحظة ، أنه كلما أصبح مربـــع الفرق بين القيم الحقيقية $Y_i$ ، والقيم المتوقعة $Y_i$ صغيرا ، كلمـا كانت الصورة الرياضية المستخدمة مناسبة . وسنوالى شرح الانحـــدار والارتباط تفصيلا فى باب آخر من هذا الكتاب .

## ٧-٣- تقديرات بيـز

## Bayesian Estimations .

تقدير بيز Bayes هو من أحدث طرق التقدير . وهذا الأسلوب شائع التطبيق وخاصة فى مجال العلوم الاقتصادية . وبصفة عامـــــة ، فكثيرا ما ينظر الى المعالم على أنها مجاهيل ثابتة . بيد أنه فى أسلوب ببيز تصبح المعالم متغيرات عشوائية لها توزيع قبلى Prior distribution وهو غالبا يعكس معتقدات الشخص من القيــــم المفترضة للمعالم . وتتركز المشكلة الأساسية فى تقديرات بيز فـــى دمج الاعتقاد الأولى عن قيمة المعلمة مع بيانات العينة .

ولتوضيح هذا الاسلوب ، افترض أنه فى بلد ما أنه من المعروف أن السماء تمطر فى ٤٠٪ من أيام السنة . وفى نحو ٦٠٪ من الأيام تكون السماء صحوا والشمس ساطعة . فاذا أرادت أحد المؤسسات التى تصنع أجهزة قياس حالة الجو اختبار الجودة الأجهزة والتى تقوم بتصنيعها . وتبين أن الجهاز يتوقع حالات مطرية فى ١٠ ٪ من المرات التى يكون فيها الجو صحوا . ونفس الجهاز يتوقع بخطأ مقداره ٢٠ ٪ حالة ممطرة فى الايام الصحوة ، أى أن :

جدول رقم (٦) : الاحتمالات القبلية

| الحالة $\theta$ | ممطر ( $\theta_1$ ) | صحو ( $\theta_2$ ) |
|---|---|---|
| الاحتمال الأولى $f(\theta)$ | ,٤٠ | ,٦٠ |

على ذلك فاذا اعتبرنا $\theta$ تعبر عن احتمال سقوط أمطار ، وأن توقع الجهاز لسقوط المطر هو x فأن :

$$P(\theta_1 \cap X_1) = P(\theta_1) \cdot P(X_1 / \theta_1) = (0.40)(0.90) = 0.36 \quad (١٤)$$

كذلك يكون احتمال أن يكون الجو صحوا ، بينما يكون توقع الجهاز حالة مطر هو :

$$P(\theta_2 \cap X_1) = P(\theta_2) \cdot P(X_1 / \theta_2) = (0.60)(0.20) = 0.12 \quad (١٥)$$

والآن تصبح هناك حاجة الى فراغ عينة $S$ جديد بدلا من المعروف فى جدول رقم (٦) . فيصبح الحصول على ما يسمى بالتوزيع البعدى Posterior Dist. من الأهمية بمكان كما هو الحال فى جدول رقم (٨).

جدول رقم (٧) : الاحتمالية المشروط $P(X/\theta)$

| الحالة $\theta$ / توقع x | ممطر ( $\theta_1$ ) | صحو ( $\theta_2$ ) |
|---|---|---|
| ممطر $X_1$ | ,٩٠ | ,٢٠ |
| صحو $X_2$ | ,١٠ | ,٨٠ |
| المجموع | ١, | ١, |

جدول رقم (٨) : الاحتمال البعدي ( $P(\theta/X)$

| | ممطر ( $\theta_1$ ) | صحو ( $\theta_2$ ) |
|---|---|---|
| الاحتمال البعدى P( $\theta$ / ممطر ) | ,٧٥ | ,٢٥ |

ويمكن مقارنة الاحتمال القبلى والبعدى فى جدولى ( ٦ ) ، ( ٧ ) والنتائج فى جدول رقم ( ٨ ) تحسب كالاتى :

$$P(\theta_1/X_1) = \frac{P(\theta_1 \cap X_1)}{P(X_1)} = \frac{0.36}{0.48} = 0.75^{(*)}$$

$$P(\theta_2/X_1) = \frac{P(\theta_2 \cap X_1)}{P(X_1)} = \frac{0.12}{0.48} = 0.25$$

---

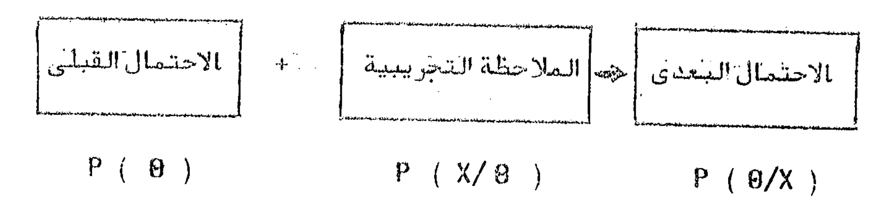
(*) لاحظ :

$P(X_1)$ =" احتمال توقع المطر " $= 0.36 + 0.12 = 0.48$

أو ببساطة يمكن القول أن :

$$p(\theta/X) = \frac{P(\theta \cap X)}{P(X)} \quad ; \quad P(X) \neq 0$$

أو أنه يمكن صياغة نظرية Bayes كما يلى :




ومن الاحتمال البعدى فى هذا المثال يمكن القطع بأن التوزيع النسبى الحقيقى لحالة المطر هو ٠,٧٥ ويمكن بعد هذا المثال البسيط صياغة نظرية **Bayes** بصفة عامة كالاتى :

لو أن الأحداث $B_1, B_2, \ldots\ldots, B_k$ تمثل مكونات فراغ العينة $S$ وأن احتمال $P(B_i) \neq 0$ لكل $i=1,2\ldots\ldots K$ . حينئذ لأى حدث $A$ فى فراغ العينة $S$ بحيث أن $P(A) \neq 0$ يكون :

$$P(B_r/A) = \frac{P(B_r) \cdot P(A/B_r)}{\sum_{i=1}^{K} P(B_i) \cdot P(A/B_i)}$$

حيث أن $r=1,2 \ldots\ldots\ldots K$ .

وبعد الحصول على الاحتمال البعدى للمعالم يمكن استخدامه للحصول على تقديرات أو الحصول على توزيع احتمالى لهذه المعالم . وقد أصبح لهذه النظرية تطبيقات عديدة .

## ٧-٤ طريقة تعظيم الاحتمـــال

## The Method of Maximum Likelihood .

اكتشف هذه الطريقة فيشر R. A. Fisher فى بداية العشرينـــات من هذا القرن . وكذلك فقد أوضح خصائص تقديرات معظمة الاحتمال وبين أنهـا تقديرات كافية Sufficient ، وأنهـا Asymptotically Minimum Variance Unbiased Est . وأنهـا ليست بالضـــرورة أن تكون Unbiased أى غير متحيزة . وهذا ما سنلفت الاشارة اليــــه فيما بعد .

والدالة الاحتمالية لقيم عينة عشوائية $X_1, X_2, X_3 \ldots . X_n$ من مجتمع معلمته $\theta$ هى :

$$L(\theta) = f(X_1, X_2 \ldots\ldots\ldots . X_n ; \theta) = \prod_{i=1}^{n} f(X_i ; \theta) \qquad (١٦)$$

ويتم استخدام تقدير Likelihood عن طريق استخراج $\hat{\theta}$ التـــى تساوى قيمة المشتقات الأولى (F . O .C.) First Order Conditions بالصفر ، وذلك بعد استيفاء الشروط الكافية الثانيـة Sufficient Second Order Conditions (S. O . C.) وهذه بمثابة الشروط الكافية للمعظمة ، وهى بطبيعة الحال تتوقف علـــى طبيعة الدالة التى يراد تعظيمها . وفى حالة المعظمة يجب أن تكون الدالة Concave أو أحيانا Strictlcy quasi Con. أى أن المطلوب هو حل :

$$\frac{d}{d\theta}\left[ \ln L(\theta) \right] \Big|_{\theta=\hat{\theta}} = 0 \qquad (١٧)$$

حيث أن $\theta \in \Omega$ ، وأن $\Omega$ فراغ المعالم Parameter Space.

**مثال :** لعينة عشوائية من حجم $n$ من مجتمع طبيعى متوسطه $U$ وتباينه $6^2$ . أوجد تقديرات كل من $U, 6^2$ باستخدام طريقة معظمة الاحتمال .

**الحل:**

$$L(U,6^2) = f(X_1, X_2, \ldots\ldots X_n ; U, 6^2) \qquad (١٧)$$

$$= \prod_{i=1}^{n} N(X_i ; U, 6^2) \qquad (١٨)$$

$$= \left(\frac{1}{6\sqrt{2\pi}}\right)^n \cdot e^{\frac{-1}{2\,6^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i - U)^2} \qquad (١٩)$$

ويتفاضل ( $U, 6^2$ ) $1nL$ تفاضلا جزئيا بالنسبة الى :

$$\theta = (U, 6^2) \in \Omega \qquad (٢٠)$$

ينتج

$$\left.\frac{d(1n(U,6^2)}{dU}\right|_{U=\hat{U}} = \frac{1}{6^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \hat{U}) = 0 \qquad (٢١)$$

$$\left.\frac{d}{d6^2}(1nL(U,6^2)\right|_{6=\hat{6}} = \frac{-n}{\hat{6}^2} + \frac{1}{2\hat{6}^4}\sum_{i=1}^{n}(X_i - U)^2 = 0 \qquad (٢٢)$$

والشرطين فى (٢١) - (٢٢) هى الشروط الأولى الضرورية وليست الكافية لتعظيم الدالة فى (٣) . وللحصول على الشرط الثانى الكافى لابد وأن تكون الدالة فى (١٩) مقعرة Concave أو أن يكون محدد

هاسين لها Negative Definite أو أن :

$$\frac{d}{dU^2} \ln L(U, 6^2) > o \; ; \; \frac{d}{d6^2} \ln L(U, 6^2) > o$$

$$\frac{d^2}{dU^2} \ln L(U, 6^2) < o \; ; \; \frac{d}{d6^2} \left( \frac{\partial}{\partial 6^2} \ln L(U, 6^2) \right) < o$$

وبعد استيفاء الشروط الثانية ، يمكن حل كل من (٢١) - (٢٢) للحصول على تقدير للمعلمتين $U, 6^2$ كالاتى :

$$\hat{U} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i = \bar{X} \qquad (٢٣)$$

وهذا يعنى أن $\bar{X}$ للعينة هو تقدير معظمة الاحتمال للمعلمة U، وهو تقدير كافى وغير متحيز ومتسق كما سيرد شرحه فيما بعد. أما

$$\hat{6}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2 \neq S^2 \qquad (٢٤)$$

بذلك يمكن القول أن تقديرات معظمة الاحتمال ليست بالضرورة أن تكون غير متحيزة . كذلك فأننا لم نثبت أن $\hat{6}$ هو تقدير معظمة الاحتمال للمعلمة $6$ . بيد أنه تقدير معظمة الاحتمال ، تحت شروط محددة Limiting Conditions له خاصة تسمى Invariance Property وتعنى أنه اذا كانت $\hat{\theta}$ هى تقدير معظمة الاحتمال للمعلمة $\theta$ ، فأنه لأى دالة مستمرة Continuous Fumction مثل $g(\theta)$ فأن $g(\hat{\theta})$ هى أيضا تقدير معظمة الاحتمال للدالة $g(\theta)$ بذلك فقط يمكن القول أن :

$$\hat{6} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - X)^2} \qquad (٢٥)$$

هى تقدير معظمة الاحتمال للمعلمة $6$.

**مثال ٢ :** لعينة عشوائية من حجم n من مجتمع طبيعى ، افترض أن المطلوب هو تقدير :

$$Y = \alpha + B X_i + u_t \qquad (٢٦)$$

حيث أن :

$$E(u_t) = 0$$

$$E(u_t^2) = \begin{cases} \sigma^2_{u_t} & i=j \;,\; i,j = 1,2\ldots\ldots n \quad \text{لأى} \\ 0 & i \neq j \quad i,j = 1,2\ldots\ldots n \quad \text{لأى} \end{cases}$$

وأن

$$f(u_t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi \cdot \sigma^2_{u_t}}} \cdot \exp \dfrac{-U_t^2}{2\sigma^2_{ut}} & -\infty < U_t < \infty \\ & \sigma > 0 \\ 0 & \text{فى كل مكان آخر} \end{cases} \qquad (٨)$$

أو أن

$$U_t \sim NID(0, \sigma^2_{Ut})$$

والمطلوب هو الحصول على تقدير معظمة الاحتمال لكل من $B, \alpha$.

**الحـل :** بما أن كل قيم العينة هى عبارة عن i.id's أى كلها مستقلة ومتماثلة فانه يمكن اعتبار توزيع $u_t$ على أنه :

$$P(u_1, u_2 \ldots\ldots u_n) = \frac{1}{(\sigma_u^2 \cdot 2\pi)^{n/2}} \cdot \exp\left(\frac{-1}{2\sigma_u^2} \sum_{i=1}^{n} U_i^2\right) \qquad (٩)$$

وذلك لعينة عشوائية حجم n . وبصفة عامة فأن الدالة الاحتماليــة يمكن كتابتها على أنها

$$L(\theta) = f(X_1, X_2 \ldots\ldots\ldots X_n \; ; \theta) \qquad (١٠)$$

والمراد هو تعظيم هذه الدالة بالرجوع الى $\Omega$ وأن $\theta \in \Omega$ .

$$\text{Max. } L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(X_i \; ; \theta) \qquad (١١)$$

وأن المطلوب للحصول على القيم المعظمه لهذه الدالة هى الحصول على F.O.C.، S.O.C. كما سبق الاشارة أى أن :

$$\left. \frac{d \; L(\theta)}{d\theta} \right|_{\theta = \hat{\theta}} = 0 \qquad (١٢)$$

وهذه بمثابة الشروط الأولى الضرورية . افترض للتسبط فقط أن الدالة مقعرة وأن الشروط الثانية تعتبر مستوفاه . فأنه يمكن اعادة كتابة الدالة الاحتمالية على أنها :

$$L = \frac{1}{(6_u^2 \cdot 2\pi)^{n/2}} \cdot \exp\left( - \frac{1}{26^2} \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \alpha - BX_i)^2 \right)$$

$$= \prod_{i=1}^{n} f(X_i ; \theta) = \prod_{i=1}^{n} f(X_i ; \alpha , B, 6_u^2) \qquad (١٣)$$

حيث أن $\theta = (\alpha, B, 6_u^2)$

$$= \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi 6_u^2}} \exp \frac{-1}{26^2} (u_t - \theta)^2$$

حيث أن $t = 1,2,\ldots\ldots n \;,\; 0 < U_t < \infty$

وبالحصول على اللوغاريتم الطبيعى للدالة فى المعادلة رقم (١٣) فأن :

$$\ln L = -\frac{n}{2}\ln 2\pi - \frac{n}{2}\ln \sigma_u^2 - \frac{1}{2\sigma_u^2}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \alpha - BX_i)^2 \qquad (١٤)$$

وبالتفاصل الجزئى للمعادلة فى (١٤) نحصل على :

$$\frac{d(\ln L)}{d\alpha} = -\frac{1}{2\sigma_u^2}(-2)\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \hat{\alpha} - \hat{B}X_i) = 0 \qquad (١٥)$$

$$\frac{d(\ln L)}{dB} = -\frac{1}{2\sigma_u^2}(-2)\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \hat{\alpha} - \hat{B}X_i)X_i = 0 \qquad (١٦)$$

$$\frac{d(\ln L)}{d\sigma_u^2} = \frac{-n}{2\sigma_u^2} + \frac{1}{2\sigma_u^4}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \hat{\alpha} - \hat{B}X_i)^2 = 0 \qquad (١٧)$$

والمعادلات من (١٥) ـ (١٧) تصف ما يسمى f.o.c. وباعتبار أن محدد هاسين negative defint فأنه يمكن اعادة كتابة المعادلات من (١٥) ـ (١٧) على أنها

$$\sum_{i=1}^{n} Y_i = n\hat{\alpha} + \hat{B}X_i \qquad (١٨)$$

$$\sum_{i=1}^{n} X_iY_i = \hat{\alpha}\sum_{i=1}^{n} X_i + \hat{B}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \qquad (١٩)$$

وجدير بالاشارة الى أن حل (١٨) - (١٩) هو نفس الحل الذى تحصلنا عليه من المعادلات الطبيعية (٧) - (٨) ص ٩٦ . وهى تقديرات معظمه الدالة الاحتمالية للمعالم $B$ و $\alpha$ .

## حدود الثقة
## Confidence Limits

غالبا ما يكون المطلوب هو تقدير حدود Limits لتقدير معلمة ما ، فمثلا عند تقدير متوسط المجتمع ، من الممكن أن نصل الى نتيجة

$$10 < U < 15$$

وتتحدد مدى الثقة بالمدى $100\,\%\,(1-\alpha)$ والذى من المفروض أن يكون قصيرا كلما أمكن . وسوف نعوض فى هذا الجزء بعض نماذج من حدود الثقة ، وفى الاجزاء اللاحقه سوف نُلحقها بعد تقدير المعالم .

### ١- حدود الثقة للمتوسطات :

سبق الاشارة الى أن توزيع $\bar{X}$ هو :

$$\bar{X} \sim N\left(U_{\bar{x}}\,,\ \frac{\sigma^2}{n}\right) \qquad (١)$$

وعلى هذا الاساس يمكن كتابة :

$$P\left(-Z_{\frac{\alpha}{2}} < Z < Z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha \qquad (٢)$$

حيث أن :

$$Z = \frac{\bar{X} - u}{\sigma/\sqrt{n}}$$

بالتعويض فى (٢) نجد أن :

$$P\left(\bar{X} - Z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < U < \bar{X} + Z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha$$

أو أن حدى الثقة هما :

$$\text{الحد الأدنى} = \bar{X} - Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

................. (٣)

$$\text{الحد الأعلى} = \bar{X} + Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

وذلك بفرض معرفة قيمة $\sigma$ . وهذا التقريب فى (٣) يصبح صحيحا حتى ولو كانت العينة مسحوبة من مجتمع غير طبيعى بشرط أن حجم العينة $\geq$ ٣٠ وأن $\sigma$ معلومة .

وعندما يكون كلا من $\sigma$ , $u$ غير معلومين ، وحجم العينة $n < 30$ فأنه يمكن التوصل الى :

$$\bar{X}-t_{(\frac{\alpha}{2},n-1)} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} < U < \bar{X} + t_{(\frac{\alpha}{2},n-1)} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} \cdots\cdots\cdots \quad (٤)$$

وذلك حيث أن

$$t = \frac{\bar{X} - U}{\frac{S}{\sqrt{n}}} .$$

ويجب أن يراعى أن توزيع $t$ متماثل كتوزيع $Z$ ، الا أن منطقة الرفض متوقف على طبيعة الفرض البديل $H_a$ ، فقد يتم اختيار فرض العدم $H_o$ فى ناحية واحدة One Side وفى هذه الحالة لا نقسم مستوى المعنوية $\alpha$ على ٢ أو فى ناحيتين two sides وفى هذه الحالة يلزم قسمة $\alpha$ على ٢ . كما وأن لهذا التوزيع درجات حرية تعتمد على درجات حرية $X^2$ كما سبق الاشارة فى الجزء الخاص بتوزيعات العينة . ويمكن تقدير حدود ثقة للفرق بين متوسطى عينتين ،

ولنسبة التباين وغير ذلك ، بنفس الطريقة السابق شرحها فى (١)،(٣).

## خواص التقديرات

جرى العرف بين الاحصائيين على اعتبار بعض الخصائص الهامة كمعايير لتقييم التقدير الاحصائى . وبصفة عامة فهناك تقديرات جيدة وذات خصائص محددة . ولا يفوتنا أن تنوه هنا الى التضحية بأى من هذه الخواص يجب على الأكثر أن يكون فى سبيل الحصول على شىء مرغوب أو هدف ينشده الباحث . بل من الاجدر أن لا يفقد الباحث خاصة هامة بسهولة ، بل من الواجب عليه أن يحاول قدر استطاعته أن تكون الاحصاءات التى يحصل عليها من بيانات العينة جيدة ومتسقة مع الواقع .

وبصفة عامة سنورد شرح موجزا لكل من عدم التحيزUnbiasednes، وأدنى تباين Minimum Variance، والاتسان Consistency، والكفاءة النسبية Relative Efficiency ، والكفاية Sufficiency .

### ١ - التقديرات الغير متحيزة

### Unbiased Estimators

التقدير يجب على الأقل غير متحيز . وهذه الخاصة تعنى أنه فى المتوسط يجب أن تتساوى قيمة الاحصائية مع المعلمة التى تستخدم كتقدير لها . أو أن القيمة المتوقعة للاحصائية تساوى المعلمة . ولذلك فهذه الخاصة يطلق عليها Average property. وفى هذه الحالة يقال أن التقدير غير متحيز ، وعكس ذلك يكون متحيزا Biased . أى أن :

$$E(\hat{\theta}) = \theta$$

**مثال ١:** $\bar{x}$ يعتبر تقدير غير متحيز للمعلمة u لأى مجتمع لـــه متوسط محدد .

$$E(\bar{x}) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}(nu) = u$$

**مثال ٢:** لو أن ( $X \sim b(x;n,\theta)$ ، بين أن $y = \frac{X}{n}$ أو نسبة النجاح هى تقدير غير متحيز للمعلمة $\theta$.

**الحل :** بما أن $E(x) = n\theta$ ، فأن :

$$E\left(\frac{X}{n}\right) = \frac{1}{n}E(x) = \frac{1}{n} \cdot n\theta = \theta$$

وهنا يجب أن نشير الى نظرية هامة وهى لو أن $S^2$ هو تباين عينـــة عشوائية r. s. من مجتمع غير محدد ، حينئذ فأن $E(S^2) = 6^2$.
واثبات هذه النظرية كالاتى :

$$E(S^2) = E\left(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - X)^2\right) = \frac{1}{n-1}E\left(\sum_{i=1}^{n}(X_i - u)^2 - (\bar{X}-u)^2\right)^2$$

$$= \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}E(X_i - U)^2 - n.E(x-u)^2\right)$$

وبما أن $E(x_i - u)^2 = 6^2$ فأن $E(\bar{x}-u)^2 = \frac{6^2}{n}$

$$E(S^2) = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}6^2 - n\frac{6^2}{n}\right) = \frac{1}{n-1}\left(\frac{n^2 6^2}{n} - \frac{n6^2}{n}\right)$$

$$= \frac{6^2}{n-1}\left(\frac{n(n-1)}{n}\right) = 6^2$$

بيد أن $S^2$ليس تقديرا غير متحيزا لتباين المجتمع المحـــــدد finite . وفى كلا الحالتين فأن S ليس تقديرا غير متحيزا للمعلمة 6.

ولكن فى بعض الأحيان قد يكون الاختيار بين العديد من التقديرات الغير متحيزة . وفى هذه الحالة يعتمد على التقدير ذو التباين الأدنى . مثلا فى حالة المجتمع الطبيعى ، فأن كلا من $\bar{X}$ ، $\tilde{X}$ أى المتوسط والوسيط للعينة كلا هما تقدير غير متحيز للمعلمة U . بذلك يكون معيار التباين الأدنى Minimum Variance هو أداة الاختيار بين التقديرات الغير متحيزة أن وجد أكثر من تقدير ويقال عن هذا المعيار Minimum Variance Unbiased Estimator .

ويمكن استخدام لا متساوية كرمر - رو Cramér- Rao Inequality تحت شروط عامة محددة لسنا بصدد شرحها على هذا المستوى .

$$\mathrm{Var}(\hat{\theta}) \geqslant \frac{1}{n.E\left[\left(\frac{\partial \ln f(x)}{\partial \theta}\right)^2\right]}$$

لاثبات أن $\hat{\theta}$ هى أدنى تباين غير متحيز للمعلمة $\theta$ . حيث أن $f(x)$ هى دالة التكثيف الاحتمالى ، $n$ هو حجم العينة .

وفى بعض الاحيان قد تقارن تباينات التقديرات الغير متحيزة ، حيث أنه اذا كان $\mathrm{Var}(\hat{\theta}_1)$ هو تباين $\hat{\theta}_1$ ، وأن $\mathrm{Var}(\hat{\theta}_2)$ هو تباين $\hat{\theta}_2$ وكلاهما تقديران غير متحيزان للمعلمة $\theta$ ، فأن :-

$$\frac{\mathrm{Var}(\hat{\theta}_1)}{\mathrm{Var}(\hat{\theta}_2)}$$

يعتبر مقياسا لقياس كفاءة $\hat{\theta}_2$ بالنسبة الى $\hat{\theta}_1$ كمقدرين .

وفيما يتعلق بالاتساق Consistency أى مدى قرب القيم التى يأخذها المقدر من قيم المعالم فيمكن استخدام مجموعة الشروط الكافية وليست الضرورية التالية لبيان مدى اتساق المقدر وهى :

(١) لابد وأن يكون المُقدر غير متحيز .

(٢) تباين المُقدر يؤول الى الصفر كلما آلت n الى $\infty$ .

فمثلا قد سبق الاشارة الى أنه فى حالة المجتمعات الغير محددة ، فأن

$$E(S^2) = \sigma^2$$

وهذا يوضح أن $S^2$ هو تقدير غيرمتحيز للمعلمة $\sigma^2$ . كما وأن

$$V(S^2) = \frac{2\sigma^4}{n-1}$$

وبذلك فأن $V(S^2)$ سوف يؤول الى الصفر عندما $n \to \infty$ .

ويعتبر المقدر كافيا اذا تضمن كل المعلومات المتاحة بالعينة عن المعلمة . ولسنا بصدد شرح ذلك على هذا المستوى ، ولكن فقط نكتفى بهذا التحديد .

بقى لنا أن نشير الى خطوات اختبار الفروض الاحصائية . فمن المعلوم للطالب الى أن الفرض الاحصائى قد يكون بسيطا أو مركبا . وأنه يتم رفض أو قبول الفرض الاحصائى بعد تحديد منطقة الرفض . وقد يقع الباحث عند تحديد ذلك فى خطأ من النوع الأول Type I يتمثل فى رفض فرض العدم $H_0$ وهو صحيح ويكون احتمال الوقوع فى هذا النوع من الخطأ هو $\alpha$ . أو فى خطأ من النوع الثانى Type II وهو قبول فرض العدم وهو خطأ ويكون احتمال الوقوع فى هذا الخطأ هو B ، جدول رقم (٩) . $\alpha$ هى مستوى المعنوية لانها تحدد منطقة رفض فرض العدم $H_0$ . ومن الناحية العملية يمكن تحديد الخطوات التالية لاختيار الفروض الاحصائية وهى :

(١) تحديد كل $H_0$ ، $H_a$ .

(٢) اختيار الاحصائية المناسبة للاختبار .

(٣) تحديد مستوى المعنوية $\alpha$ .

(٤) مقارنة قيمة الاحصائية المحسوبة ( المُقدرة ) بالقيمة الجدولية لقبول أو رفض $H_0$ . ويرفض $H_0$ اذا كان قيمة الاحتمال أقل من أو تساوى $\alpha$ أو بمعنى آخر تكون القيمة المقدرة أكبر من مثيلتها الجدولية .

كما ويتحدد اتجاه منطقة الرفض ، وهل رفض فرض العدم فى اتجاه واحد أو اتجاهين من طبيعة الفرض البديل $H_a$ . فمثلا اذا كان

$$H_0 : U = U_0$$
$$H_a : U > U_0$$

جدول رقم (٩) : طبيعة العلاقة بين الخطأ من النوع الأول والنوع الثانى.

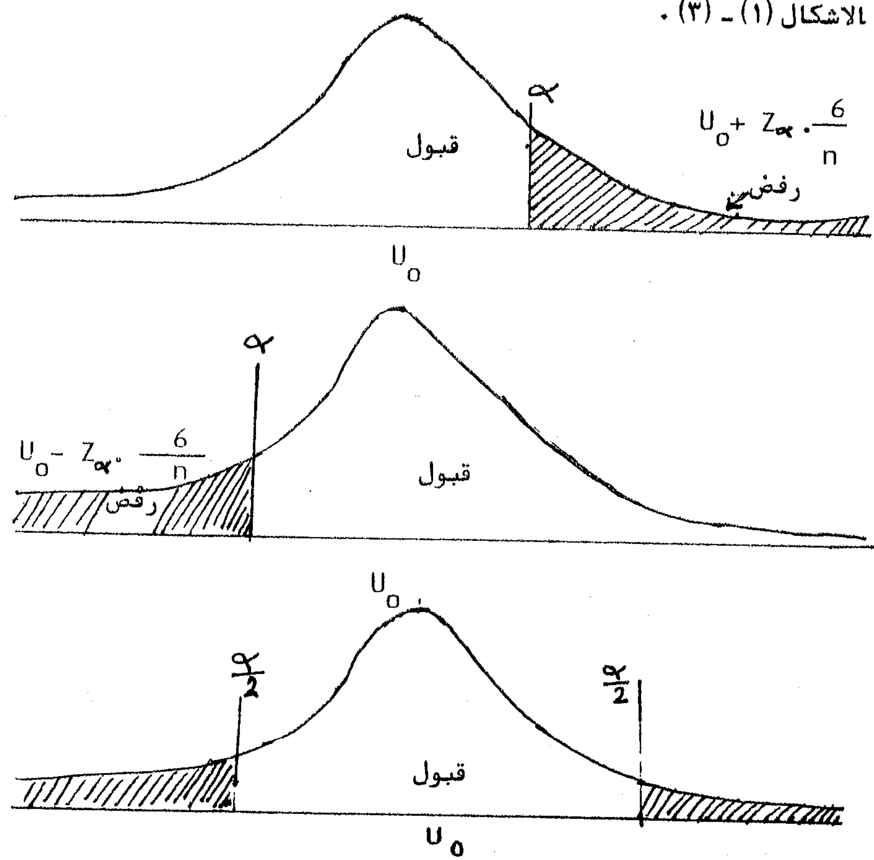
| رفض $H_0$ | قبول $H_0$ | القرار |
|---|---|---|
| مستوى المعنوية $\alpha$<br>خطأ من النوع الأول<br>Type I | قرار صحيح<br>١ - $\alpha$ | $H_0$ صحيح |
| قرار صحيح<br>1 - B<br>قوة الاختبار | خطأ من النوع الثانى<br>Type II<br>B | $H_0$ خطأ<br>( $H_a$ صحيح ) |

ملحوظة : يواجه الباحث غالبا مشكلة الموازنة بين نوعى الخطأ فليس معنى تجنب الوقوع فى خطأ من النوع الأول هو نهاية الأمر ، لأن ذلك قد يؤدى الى الوقوع فى خطأ من النوع الثانى، فتجنب أحدهما لا يعنى تجنب الأخر .

تكون منطقة الرفض ناحية اليمين . واذا كان : $H_a: U < U_o$

تكون منطقة الرفض ناحية اليسار . واذا كان : $H_a: U = U_o$

يكون الرفض فى كلا الاتجاهين ويقسم مستوى المعنوية على ٢ . راجع الاشكال (١) - (٣) .




الاشكال (١) - (٣) . تحديد منطقة الرفض ومنطقة القبول

# الباب الثامن

## الارتباط والانحدار

## Correlation and Regression

فى كثير من الأحيان يهتم الباحث بطبيعة وشدة العلاقة بين متغيرين أو أكثر . وبجانب مضمون المعالم المقدرة ومدى اتساقها مع الواقع ، تصبح اشارة وقيمة هذه المعالم المقدرة أساس تفسير الباحث للظاهرة موضع الدراسة .

وقد سبق شرح الانحدار البسيط فى الجزء رقم (٧ ـ ٢) من هذا الكتاب . وتوصلنا الى الصورة :ـ

$$\hat{B}_{Y.X.} = \text{معامل الانحدار } X \text{ على } Y = \frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2} \qquad (١)$$

ويصعب اشتقاق معامل الارتباط بنفس الطريقة على الطالب فى هذا المستوى ، وبصفة عامة فأن :

$$P = \text{معامل ارتباط المجتمع} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \cdot \sigma_Y} \qquad (٢)$$

$$= \frac{Cov\ (X,Y)}{\sqrt{V(X) .\ V(Y)}}$$

وقيمة هذا المعامل تنحصر بين $\pm 1$ ، ويقابله معامل الارتباط المقدر من العينة ويسمى معامل الارتباط البسيط Simple Correlation Coef.

أو معامل ارتباط بيرسون أو مضروب العزوم ، وصيغته :

$$r_{X.Y.} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sqrt{\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2\right]\left[\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \bar{Y})^2\right]}} \qquad (٣)$$

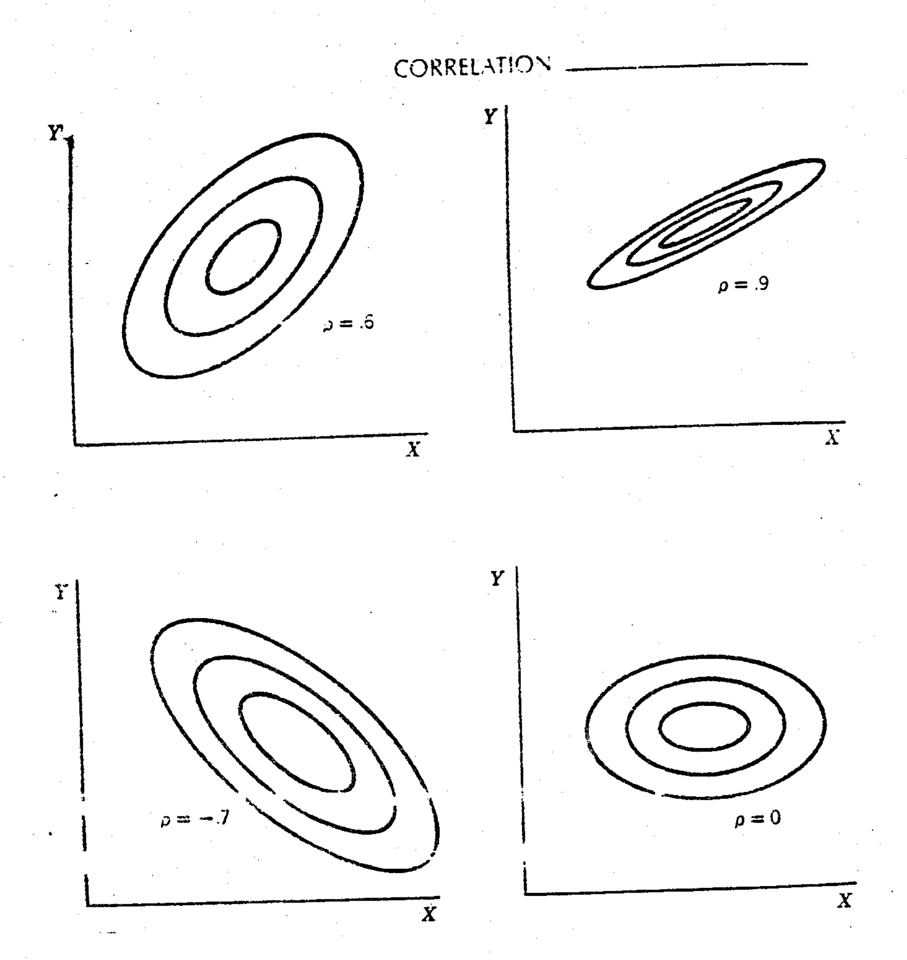
ويوضح الشكل رقم (١) - (٢) قيم معامل الارتباط المُعبرة عن شدة واتجاه العلاقة بين متغيرين هما X ، Y ويجب ملاحظة أن مقام معامل الارتباط مجموع مربعات أي موجب . وبذلك يتحدد اتجاه العلاقة ( الاشارة ) بين X ، Y من طبيعة البسط . والتى تتمثل فى ثلاث صور وهى الصفرية والموجبة والسالبة . كذلك فالمقام هو $\hat{V}(X)$ ، $\hat{V}(Y)$ والبسط هو $\hat{Cov}(X,Y)$ . فاذا تزايدت أو تناقصت قيم كل من X ، Y معا تكون الاشارة موجبة . اما اذا تناقص ترتيب الازواج كأن تزايدت X وتناقصت Y أو العكس تكون اشارة $\hat{Cov}(X,Y)$ سالبة . واذا كان كلا من X ، Y مستقلين ، فأن $\hat{Cov}(X,Y)$ يكون مساويا للصفر وبالتالى تكون قيمة معامل الارتباط أيضا صفر .

**مثال :** اذا أعطيت بيانات عن متغيرين Y ، X كالأتى :

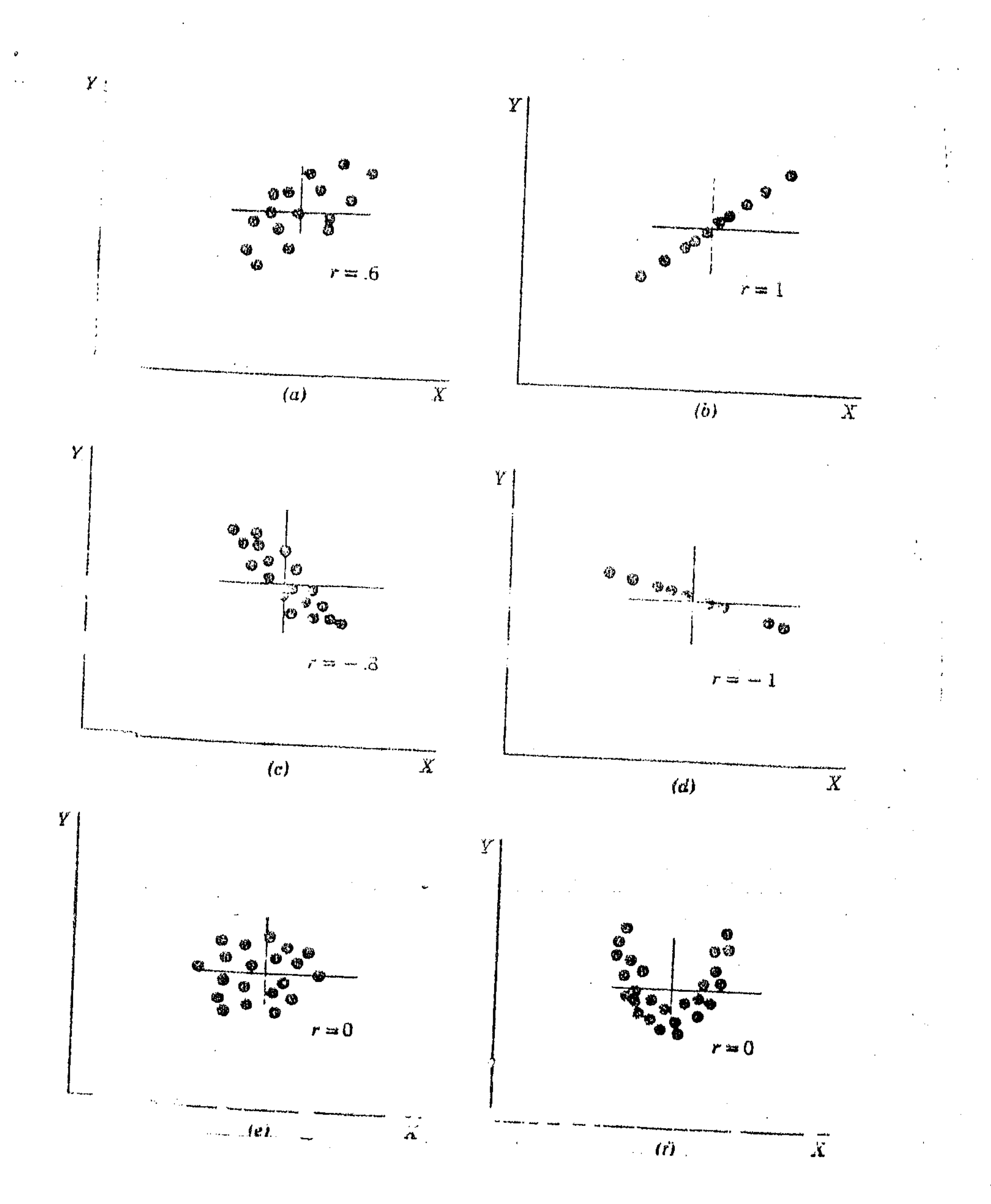
| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| X : | ٣٦ | ٨٠ | ٥٠ | ٥٨ | ٧٢ | ٦٠ | ٥٦ | ٦٨ |
| Y : | ٣٥ | ٦٥ | ٦٠ | ٣٩ | ٤٨ | ٤٤ | ٤٨ | ٦١ |

احسب معامل الارتباط ؟

**الحل :** لايجاد معامل الارتباط يمكن للطالب تتبع الحل فى الجدول الاتى :




شكل رقم (١) . قيم ρ المعبرة عن العلاقة بين X ، Y .




شكل رقم (٢) . أشكال انتشارية تبين معامل ارتباط بيرسون عند قيم مختلفة .

| $\sum_{i=1}^{n}(X-\bar{X})(Y-\bar{Y})$ | $\sum_{i=1}^{n}(Y-\bar{Y})^2$ | $\sum_{i=1}^{n}(X-\bar{X})^2$ | $(Y-\bar{Y})$ | $(X-\bar{X})$ | Y | X |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ٣٦٠ | ٢٢٥ | ٥٧٦ | -١٥ | -٢٤ | ٣٥ | ٣٦ |
| ٣٠٠ | ٢٢٥ | ٤٠٠ | ١٥ | ٢٠ | ٦٥ | ٨٠ |
| ١٠٠ | ١٠٠ | ١٠٠ | ١٠ | -١٠ | ٦٠ | ٥٠ |
| ٢٢ | ١٢١ | ٤ | -١١ | -٢ | ٣٩ | ٥٨ |
| -٢٤ | ٤ | ١٤٤ | -٢ | ١٢ | ٤٨ | ٧٢ |
| صفر | ٣٦ | صفر | -٦ | صفر | ٤٤ | ٦٠ |
| ٨ | ٤ | ١٦ | -٢ | -٤ | ٤٨ | ٥٦ |
| ٨٨ | ١٢١ | ٦٤ | ١١ | ٨ | ٦١ | ٦٨ |
| $\sum_{i=1}^{n}xy$ =٦٥٤ | $\sum(\dots)$ = ٨٣٦ | $\sum(\dots)$ =١٣٠٤ | $\sum(\dots)$ = صفر | $\sum(\dots)$ = صفر | $\bar{Y}$ =٥٠ | $\bar{X}$ =٦٠ |

$$r = \frac{654}{\sqrt{(1304)\ (836)}} = 0.62$$

واذا حسب الطالب معامل انحدار Y على X كما سبق شرحه فـــأن

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})\ (Y_i-\bar{Y})}{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2} = \frac{654}{1304} = 0.502$$

ويمكن صياغة العلاقة بين معاملى الارتباط والانحدار كالاتى :

بما أن :

$$\hat{B} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x\, y}{\sum_{i=1}^{n} x^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٤)$$

وأن

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n} x\, y}{\sqrt{\sum x^2}\sqrt{\sum y^2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٥)$$

ملاحظة : $x$ ، $y$ هي في صورة انحرافات أى مثلا $x = X_i - \bar{X}$.

اذا بقسمة المعادلتين نخلص الى :

$$\frac{\hat{B}}{r} = \frac{S_y}{S_X} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٦)$$

أو أن

$$\hat{B} = r.\left(\frac{S_Y}{S_X}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٧)$$

وهذه المعادلة تؤكد لو أن أى من $\hat{B}$ أو $r$ مساويا للصفر يكون الآخر أيضا صفر . وأيضا بالرجوع الى الشكل فى ص ٩٥ من الكتاب يمكن صياغة الاتى :

$$(Y_i - \bar{Y}) = (\hat{Y}_i - \bar{Y}) + (Y_i - \hat{Y}_i) \quad \ldots\ldots \quad (٨)$$

وبالجمع والتربيع فى الطرفين تصبح هذه المعادلة كما يلى :

$$\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \bar{Y})^2 = \sum_{i=1}^{n}(\hat{Y}_i - \bar{Y})^2 + \sum_{i=1}^{n}(Y_i - \hat{Y}_i)^2 \ldots (٩)$$

التباين الغير مشروح + التباين المشروح = التباين الكلى

وهذا مع ملاحظة أنه قد قسمنا على $n-1$ فى كلا الطرفين وهذا هو الفرق

بين كتابة المعادلة كما هو فى (٩) من صورتها فى شكل تباينات .

أو

$$\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\bar{Y})^2=\hat{\beta}^2\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2+\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\hat{Y}_i)^2 \quad ...(١٠)$$

↕

التباين المشروح بواسطة X

من ذلك يمكن ترتيب جدول التباين التالى للمثال السابق

ANOVA - Table

| مصدر الاختلاف Source of Variation | SS | d.f. درجات الحرية | M.S. أو التباين | F-ratio |
|---|---|---|---|---|
| Explained by X (مشروح بمعامل الانحدار) | $\hat{B}^2\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$ = 328 | 1 | 328 | $\frac{328}{84.7}$ =3.87 |
| Unexplained (Residual) متبقى | $\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\hat{Y}_i)^2$ = 508 | n-2 =6 | 84.7 | |
| Total الاجمالى | $SS_T$= 836 | n-1 =8-1=7 | | |

ويمكن استخدام قيمة F لاختبار الفرض :

Ho : B = o ......................... (١١)

لدرجات حرية ( ١ ، ٦ ) فى المثال السابق . ويمكن أيضا الاعتماد على العلاقة التالية طالما أن درجات حرية بسط F هى واحد فأن :

$$F = t^2 \quad \text{.................................} \quad (١٢)$$

ومن المثال السابق ، فأن قيمة $F = 1.97$ $t =$

ويمكن التأكد من ذلك باعادة الحساب من المثال مباشرة كالاتى:

$$t = \frac{\hat{B}}{S_{\hat{B}}} = \frac{0.50}{9.2/\sqrt{1304}} = \frac{\hat{B}}{S / \sqrt{\sum_{i=1}^{t} x_i^2}} \quad \text{.....} \quad (١٣)$$

$$= \frac{0.50}{0.254} = 1.97$$

ويمكن للطالب ممارسة استخدام الجداول الاحصائية لاختيار الفرض كما سبق الايضاح وأيضا فأنه يمكن وضع حدود ثقة على معامل الانحدار المُقدر وستكون النتيجة كما يلى :

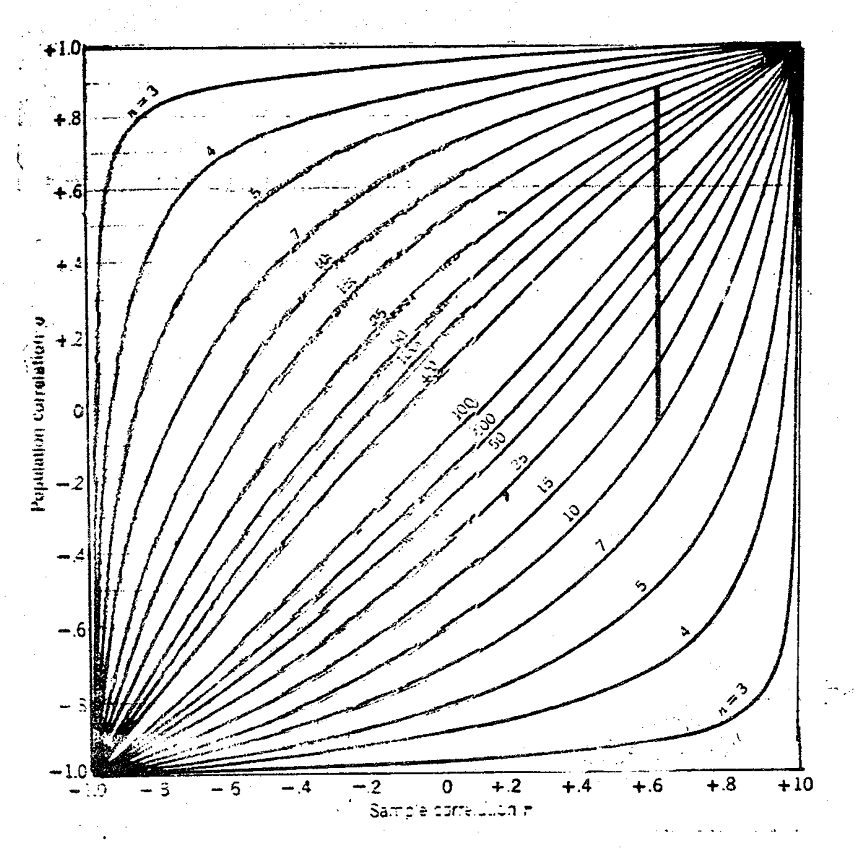
$$B = 0.50 \pm (2.45)(0.254)$$

$$= 0.50 \pm 0.62$$

$$= \hat{B} \pm t_{\frac{\alpha}{2}} \cdot S_{\hat{B}} \quad \text{.............} \quad (١٤)$$

ويوضح الشكل رقم (٣) توضيح لحدود الثقة على معامل الارتباط لعينات من حجم n . ويمكن ايضا اختيار الفرض الاحصائى :

$$Ho : P = 0$$
$$Ha : P \neq 0$$




شكل رقم (٣) . حدود الثقة (٩٥٪) على معامل ارتباط المجتمع لعينات مختلفة من حجم n .

فمن المعلوم أن :ـ

$$\frac{r}{\sqrt{1-r^2}} \cdot \sqrt{n-2} \sim t_{\alpha,(n-2)} \quad \text{..........} \quad (١٥)$$

لها توزيع t وبذلك يمكن اختيار الفرض السابق عند درجات حرية n-2

وأيضا جدير بالملاحظة أن درجات الحرية فى هذه الحالة هى n-2 وليس كالمعتاد n-1 ولكن الرجوع للتعريف السابق شرحة فى ص ٤٥ لمعرفة السبب .

واذا كان فرض العدم هو :

$$H_o : P = P_o \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (١٦)$$

أى قيمة P غير صفرية ، فأن القيمة

$$Z = \sqrt{n-3}\ \left( \frac{1}{2} \ln \frac{1+r}{1-r} - \frac{1}{2} \ln \frac{1+P_o}{1-P_o} \right) \quad \ldots\ldots \quad (١٧)$$

تعتبر اختيارا جيدا ويرفض $H_o$ اذا كان

$$|Z| > Z_{\frac{\alpha}{2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (١٨)$$

وأيضا فى أحيان كثيرة يكون لمربع معامل الارتباط $r^2$ أهميـــــة وخاصة للباحثين الاقتصاديين ويسمى معامل التحديد Coefficient of Determination والذى يمكن اشتقاقه كالاتى :

بما أن :

$$\hat{B} = r \cdot \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \bar{Y})^2}{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (١٩)$$

فأنه بالتعويض فى المعادلة رقم (١٠) نحصل على

$$\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \bar{Y})^2 = r^2 \cdot \sum_{i=1}^{n}(Y_i - \bar{Y})^2 + \sum_{i=1}^{n}(Y_i - \hat{Y}_i)^2$$

أو أن

$$r^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\bar{Y})^2 - \sum_{i=1}^{n}(Y_i-\hat{Y}_i)^2}{\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\bar{Y})^2} = \frac{\text{التباين المشروح}}{\text{التباين الكلى}}$$

(٢٠) .........

ومن الملاحظ أنه فى المعادلة رقم (٢٠) فأن البسط دائما أقل من المقام وبالتالى فالقيمة الأكثر = ١ وأيضا عندما تكون القيمة مساوية للصفر فأنه يعنى أن X لا تشرح أى تغيرات في Y ويكون خط الانحدار موازيا للمحور السينى $r= \hat{B}= 0$.

أيضا قد يهم الباحث ولاقتصادى الاشارة المقدرة للمعاملات . فمن المعروف أنه عند اجراء دراسة عن العلاقة بين السماد والمحصول مثلا أن هناك حدود يحددها قانون الغلة المتناقصة وأيضا هناك ملاحظات من الواقع وبالتالى فقد يرفض النموذج بعد تقدير معاملاته كنتيجة لعدم منطقية اشارة المعاملات المقدرة . ويتسق مع ذلك الحكم على المرونات المقدرة من النموذج وغير ذلك .

## تماريـــــــن

(١) اذا كان $U_X = U_Y = 0$ ، $6_X = 2 , 6_Y = 1$ ومعامل الارتباط بين X ، Y هو ٠,٥ . ماهو معامل الارتباط بين Y ، (X - Y) ؟

(٢) اذا أعطيت البيانات التالية عن متغيرين هما X والذى يعبر عن طول الآباء ، Y والذى يعبر عن طول الأبناء بالبوصة .

| X : | ٦٥ | ٦٣ | ٦٧ | ٦٤ | ٦٨ | ٦٢ | ٧٠ | ٦٦ | ٦٨ | ٦٧ | ٦٩ | ٧١ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Y : | ٦٨ | ٦٦ | ٦٨ | ٦٥ | ٥٩ | ٦٦ | ٦٨ | ٦٥ | ٧١ | ٦٧ | ٦٨ | ٧٠ |

أ - وقع العلاقة بين X ، Y بيانيا .

ب - قدر العلاقة التالية $Y = \alpha \pm B_X$

جـ - احسب معامل الارتباط r .

د - اختبر الفرض $Ho : B = 0$ والفرض $Ho : P = 0$

وقارن بين النتائج .

هـ - ضع حدود ثقة ( ٩٥٪) على قيمة معامل الانحدار المقدر $\hat{B}$ ؟

# المراجـــــع

## أ - مراجع باللغة العربية

(١) أحمد عبادة سرحان ( دكتور ) : مقدمة الطرق الاحصائية . ، القاهرة ، ١٩٦٢ .

(٢) رياض السيد عمارة ( دكتور ) : محاضرات في مبادىء الاحصاء الاقتصادي والاجتماعي ، جامعة القاهرة ، كلية الزراعة ، قسم الاقتصاد الزراعي ، ١٩٨٣.

(٣) عثمان أحمد الخولي ، أحمد أحمد جويلي ( دكاترة ) : أساسيات علم الاحصاء ، جامعة عين شمس ، كلية الزراعة ، قسم الاقتصاد الزراعي ، القاهرة ١٩٧٠ .

(٤) لطفي هندي ( دكتور ) : الاحصاء التجريبي ، الطبعة الأولى ، دار المعارف،القاهرة ، ١٩٦٩ .

(٥) محمد بشر ، ممدوح الروبي ( دكاترة ) : مقدمة في طرق الاحصاء وتصميم التجارب،دار المطبوعات الجديدة ، ١٩٨٣/٨٢ .

## ب - مراجع باللغة الانجليزية

(1) Clarke, R.,H. College Statistics . Thomas Nelson and Sons LTD . London , 1969 .

(2) Emarah, Riad El-S." Selected Topics in Statistical Theory and Estimation " . Cairo University, Faculty of Agric., Dept. of Agric. Economics , 1982 .

(3) Freund, John, E. and Walpole, Ronald, E. Mathematical Statistics. 3 rd Edition . Prentice-Hall, Inc.,New Jersey , 1980 .

(4) Lyman Ott. An Introduction to Statistical Methods and Data Analysis. Wadsworth Publishing Company , Inc., California,1977 .

(5) Snedecor, G.W. and Cochran, William G. Statistical Methods, Seventh Edition , The Iowa State University Press. Ames, Iowa, 1980 .

(6) Spiegel, Murray R. Schaum's Outline Series, Theory and Problems of Statistics. Mc Graw-Hill Book Company , New York, 1961 .

(7) Steel , Robert,G. and Torrie, James, H. Principles and Procedures of Statistics : A Biometrical Approach-2nd Edition McGraw-Hill Company, New York, 1980.

(8) Wonnacott,T.,and Wonnacott,R. Introductory Statistics for Business and Economics John Wiley & Sons, Inc., New York, 1972.

# الملاحـــق

## أولا: جداول الارقام اللوغاريتمية :

APPENDIX

### FOUR-PLACE COMMON LOGARITHMS

| N | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | | | Proportional Parts | | | | | | | | |
| 10 | 0000 | 0043 | 0086 | 0128 | 0170 | 0212 | 0253 | 0294 | 0334 | 0374 | 4 | 8 | 12 | 17 | 21 | 25 | 29 | 33 | 37 |
| 11 | 0414 | 0453 | 0492 | 0531 | 0569 | 0607 | 0645 | 0682 | 0719 | 0755 | 4 | 8 | 11 | 15 | 19 | 23 | 26 | 30 | 34 |
| 12 | 0792 | 0828 | 0864 | 0899 | 0934 | 0969 | 1004 | 1038 | 1072 | 1106 | 3 | 7 | 10 | 14 | 17 | 21 | 24 | 28 | 31 |
| 13 | 1139 | 1173 | 1206 | 1239 | 1271 | 1303 | 1335 | 1367 | 1399 | 1430 | 3 | 6 | 10 | 13 | 16 | 19 | 23 | 26 | 29 |
| 14 | 1461 | 1492 | 1523 | 1553 | 1584 | 1614 | 1644 | 1673 | 1703 | 1732 | 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | 18 | 21 | 24 | 27 |
| 15 | 1761 | 1790 | 1818 | 1847 | 1875 | 1903 | 1931 | 1959 | 1987 | 2014 | 3 | 6 | 8 | 11 | 14 | 17 | 20 | 22 | 25 |
| 16 | 2041 | 2068 | 2095 | 2122 | 2148 | 2175 | 2201 | 2227 | 2253 | 2279 | 3 | 5 | 8 | 11 | 13 | 16 | 18 | 21 | 24 |
| 17 | 2304 | 2330 | 2355 | 2380 | 2405 | 2430 | 2455 | 2480 | 2504 | 2529 | 2 | 5 | 7 | 10 | 12 | 15 | 17 | 20 | 22 |
| 18 | 2553 | 2577 | 2601 | 2625 | 2648 | 2672 | 2695 | 2718 | 2742 | 2765 | 2 | 5 | 7 | 9 | 12 | 14 | 16 | 19 | 21 |
| 19 | 2788 | 2810 | 2833 | 2856 | 2878 | 2900 | 2923 | 2945 | 2967 | 2989 | 2 | 4 | 7 | 9 | 11 | 13 | 16 | 18 | 20 |
| 20 | 3010 | 3032 | 3054 | 3075 | 3096 | 3118 | 3139 | 3160 | 3181 | 3201 | 2 | 4 | 6 | 8 | 11 | 13 | 15 | 17 | 19 |
| 21 | 3222 | 3243 | 3263 | 3284 | 3304 | 3324 | 3345 | 3365 | 3385 | 3404 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 |
| 22 | 3424 | 3444 | 3464 | 3483 | 3502 | 3522 | 3541 | 3560 | 3579 | 3598 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 15 | 17 |
| 23 | 3617 | 3636 | 3655 | 3674 | 3692 | 3711 | 3729 | 3747 | 3766 | 3784 | 2 | 4 | 6 | 7 | 9 | 11 | 13 | 15 | 17 |
| 24 | 3802 | 3820 | 3838 | 3856 | 3874 | 3892 | 3909 | 3927 | 3945 | 3962 | 2 | 4 | 5 | 7 | 9 | 11 | 12 | 14 | 16 |
| 25 | 3979 | 3997 | 4014 | 4031 | 4048 | 4065 | 4082 | 4099 | 4116 | 4133 | 2 | 3 | 5 | 7 | 9 | 10 | 12 | 14 | 15 |
| 26 | 4150 | 4166 | 4183 | 4200 | 4216 | 4232 | 4249 | 4265 | 4281 | 4298 | 2 | 3 | 5 | 7 | 8 | 10 | 11 | 13 | 15 |
| 27 | 4314 | 4330 | 4346 | 4362 | 4378 | 4393 | 4409 | 4425 | 4440 | 4456 | 2 | 3 | 5 | 6 | 8 | 9 | 11 | 13 | 14 |
| 28 | 4472 | 4487 | 4502 | 4518 | 4533 | 4548 | 4564 | 4579 | 4594 | 4609 | 2 | 3 | 5 | 6 | 8 | 9 | 11 | 12 | 14 |
| 29 | 4624 | 4639 | 4654 | 4669 | 4683 | 4698 | 4713 | 4728 | 4742 | 4757 | 1 | 3 | 4 | 6 | 7 | 9 | 10 | 12 | 13 |
| 30 | 4771 | 4786 | 4800 | 4814 | 4829 | 4843 | 4857 | 4871 | 4886 | 4900 | 1 | 3 | 4 | 6 | 7 | 9 | 10 | 11 | 13 |
| 31 | 4914 | 4928 | 4942 | 4955 | 4969 | 4983 | 4997 | 5011 | 5024 | 5038 | 1 | 3 | 4 | 6 | 7 | 8 | 10 | 11 | 12 |
| 32 | 5051 | 5065 | 5079 | 5092 | 5105 | 5119 | 5132 | 5145 | 5159 | 5172 | 1 | 3 | 4 | 5 | 7 | 8 | 9 | 11 | 12 |
| 33 | 5185 | 5198 | 5211 | 5224 | 5237 | 5250 | 5263 | 5276 | 5289 | 5302 | 1 | 3 | 4 | 5 | 6 | 8 | 9 | 10 | 12 |
| 34 | 5315 | 5328 | 5340 | 5353 | 5366 | 5378 | 5391 | 5403 | 5416 | 5428 | 1 | 3 | 4 | 5 | 6 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| 35 | 5441 | 5453 | 5465 | 5478 | 5490 | 5502 | 5514 | 5527 | 5539 | 5551 | 1 | 2 | 4 | 5 | 6 | 7 | 9 | 10 | 11 |
| 36 | 5563 | 5575 | 5587 | 5599 | 5611 | 5623 | 5635 | 5647 | 5658 | 5670 | 1 | 2 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 10 | 11 |
| 37 | 5682 | 5694 | 5705 | 5717 | 5729 | 5740 | 5752 | 5763 | 5775 | 5786 | 1 | 2 | 3 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 38 | 5798 | 5809 | 5821 | 5832 | 5843 | 5855 | 5866 | 5877 | 5888 | 5899 | 1 | 2 | 3 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 39 | 5911 | 5922 | 5933 | 5944 | 5955 | 5966 | 5977 | 5988 | 5999 | 6010 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 40 | 6021 | 6031 | 6042 | 6053 | 6064 | 6075 | 6085 | 6096 | 6107 | 6117 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 8 | 9 | 10 |
| 41 | 6128 | 6138 | 6149 | 6160 | 6170 | 6180 | 6191 | 6201 | 6212 | 6222 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 42 | 6232 | 6243 | 6253 | 6263 | 6274 | 6284 | 6294 | 6304 | 6314 | 6325 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 43 | 6335 | 6345 | 6355 | 6365 | 6375 | 6385 | 6395 | 6405 | 6415 | 6425 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 44 | 6435 | 6444 | 6454 | 6464 | 6474 | 6484 | 6493 | 6503 | 6513 | 6522 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 45 | 6532 | 6542 | 6551 | 6561 | 6571 | 6580 | 6590 | 6599 | 6609 | 6618 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 46 | 6628 | 6637 | 6646 | 6656 | 6665 | 6675 | 6684 | 6693 | 6702 | 6712 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 7 | 8 |
| 47 | 6721 | 6730 | 6739 | 6749 | 6758 | 6767 | 6776 | 6785 | 6794 | 6803 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 48 | 6812 | 6821 | 6830 | 6839 | 6848 | 6857 | 6866 | 6875 | 6884 | 6893 | 1 | 2 | 3 | 4 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 49 | 6902 | 6911 | 6920 | 6928 | 6937 | 6946 | 6955 | 6964 | 6972 | 6981 | 1 | 2 | 3 | 4 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 50 | 6990 | 6998 | 7007 | 7016 | 7024 | 7033 | 7042 | 7050 | 7059 | 7067 | 1 | 2 | 3 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 51 | 7076 | 7084 | 7093 | 7101 | 7110 | 7118 | 7126 | 7135 | 7143 | 7152 | 1 | 2 | 3 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 52 | 7160 | 7168 | 7177 | 7185 | 7193 | 7202 | 7210 | 7218 | 7226 | 7235 | 1 | 2 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 7 |
| 53 | 7243 | 7251 | 7259 | 7267 | 7275 | 7284 | 7292 | 7300 | 7308 | 7316 | 1 | 2 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 6 | 7 |
| 54 | 7324 | 7332 | 7340 | 7348 | 7356 | 7364 | 7372 | 7380 | 7388 | 7396 | 1 | 2 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 6 | 7 |
| N | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |

## تابع : جداول الارقام اللوغاريتمية :

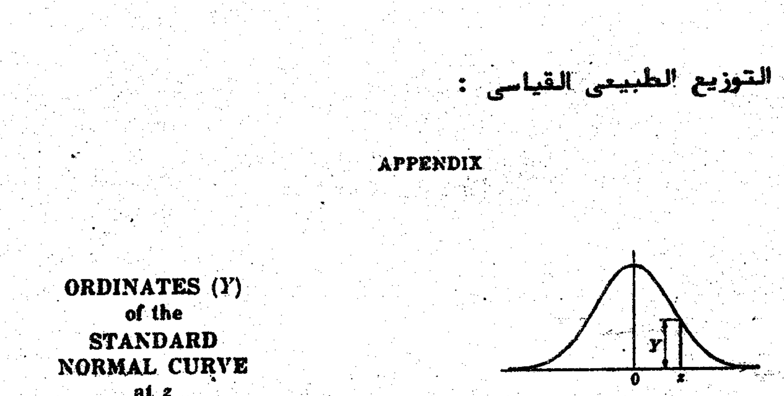
APPENDIX

# FOUR-PLACE COMMON LOGARITHMS

| N | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | | | Proportional Parts | | | | | | | | |
| 55 | 7404 | 7412 | 7419 | 7427 | 7435 | 7443 | 7451 | 7459 | 7466 | 7474 | 1 | 2 | 2 | 3 | 4 | 5 | 5 | 6 | 7 |
| 56 | 7482 | 7490 | 7497 | 7505 | 7513 | 7520 | 7528 | 7536 | 7543 | 7551 | 1 | 2 | 2 | 3 | 4 | 5 | 5 | 6 | 7 |
| 57 | 7559 | 7566 | 7574 | 7582 | 7589 | 7597 | 7604 | 7612 | 7619 | 7627 | 1 | 2 | 2 | 3 | 4 | 5 | 5 | 6 | 7 |
| 58 | 7634 | 7642 | 7649 | 7657 | 7664 | 7672 | 7679 | 7686 | 7694 | 7701 | 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 59 | 7709 | 7716 | 7723 | 7731 | 7738 | 7745 | 7752 | 7760 | 7767 | 7774 | 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 60 | 7782 | 7789 | 7796 | 7803 | 7810 | 7818 | 7825 | 7832 | 7839 | 7846 | 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 4 | 5 | 6 | 6 |
| 61 | 7853 | 7860 | 7868 | 7875 | 7882 | 7889 | 7896 | 7903 | 7910 | 7917 | 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 4 | 5 | 6 | 6 |
| 62 | 7924 | 7931 | 7938 | 7945 | 7952 | 7959 | 7966 | 7973 | 7980 | 7987 | 1 | 1 | 2 | 3 | 3 | 4 | 5 | 6 | 6 |
| 63 | 7993 | 8000 | 8007 | 8014 | 8021 | 8028 | 8035 | 8041 | 8048 | 8055 | 1 | 1 | 2 | 3 | 3 | 4 | 5 | 5 | 6 |
| 64 | 8062 | 8069 | 8075 | 8082 | 8089 | 8096 | 8102 | 8109 | 8116 | 8122 | 1 | 1 | 2 | 3 | 3 | 4 | 5 | 5 | 6 |
| 65 | 8129 | 8136 | 8142 | 8149 | 8156 | 8162 | 8169 | 8176 | 8182 | 8189 | 1 | 1 | 2 | 3 | 3 | 4 | 5 | 5 | 6 |
| 66 | 8195 | 8202 | 8209 | 8215 | 8222 | 8228 | 8235 | 8241 | 8248 | 8254 | 1 | 1 | 2 | 3 | 3 | 4 | 5 | 5 | 6 |
| 67 | 8261 | 8267 | 8274 | 8280 | 8287 | 8293 | 8299 | 8306 | 8312 | 8319 | 1 | 1 | 2 | 3 | 3 | 4 | 5 | 5 | 6 |
| 68 | 8325 | 8331 | 8338 | 8344 | 8351 | 8357 | 8363 | 8370 | 8376 | 8382 | 1 | 1 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 5 | 6 |
| 69 | 8388 | 8395 | 8401 | 8407 | 8414 | 8420 | 8426 | 8432 | 8439 | 8445 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 4 | 4 | 5 | 6 |
| 70 | 8451 | 8457 | 8463 | 8470 | 8476 | 8482 | 8488 | 8494 | 8500 | 8506 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 4 | 4 | 5 | 6 |
| 71 | 8513 | 8519 | 8525 | 8531 | 8537 | 8543 | 8549 | 8555 | 8561 | 8567 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 4 | 4 | 5 | 5 |
| 72 | 8573 | 8579 | 8585 | 8591 | 8597 | 8603 | 8609 | 8615 | 8621 | 8627 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 4 | 4 | 5 | 5 |
| 73 | 8633 | 8639 | 8645 | 8651 | 8657 | 8663 | 8669 | 8675 | 8681 | 8686 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 4 | 4 | 5 | 5 |
| 74 | 8692 | 8698 | 8704 | 8710 | 8716 | 8722 | 8727 | 8733 | 8739 | 8745 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 4 | 4 | 5 | 5 |
| 75 | 8751 | 8756 | 8762 | 8768 | 8774 | 8779 | 8785 | 8791 | 8797 | 8802 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 5 | 5 |
| 76 | 8808 | 8814 | 8820 | 8825 | 8831 | 8837 | 8842 | 8848 | 8854 | 8859 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 5 | 5 |
| 77 | 8865 | 8871 | 8876 | 8882 | 8887 | 8893 | 8899 | 8904 | 8910 | 8915 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 5 |
| 78 | 8921 | 8927 | 8932 | 8938 | 8943 | 8949 | 8954 | 8960 | 8965 | 8971 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 5 |
| 79 | 8976 | 8982 | 8987 | 8993 | 8998 | 9004 | 9009 | 9015 | 9020 | 9025 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 5 |
| 80 | 9031 | 9036 | 9042 | 9047 | 9053 | 9058 | 9063 | 9069 | 9074 | 9079 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 5 |
| 81 | 9085 | 9090 | 9096 | 9101 | 9106 | 9112 | 9117 | 9122 | 9128 | 9133 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 5 |
| 82 | 9138 | 9143 | 9149 | 9154 | 9159 | 9165 | 9170 | 9175 | 9180 | 9186 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 5 |
| 83 | 9191 | 9196 | 9201 | 9206 | 9212 | 9217 | 9222 | 9227 | 9232 | 9238 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 5 |
| 84 | 9243 | 9248 | 9253 | 9258 | 9263 | 9269 | 9274 | 9279 | 9284 | 9289 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 5 |
| 85 | 9294 | 9299 | 9304 | 9309 | 9315 | 9320 | 9325 | 9330 | 9335 | 9340 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 5 |
| 86 | 9345 | 9350 | 9355 | 9360 | 9365 | 9370 | 9375 | 9380 | 9385 | 9390 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 5 |
| 87 | 9395 | 9400 | 9405 | 9410 | 9415 | 9420 | 9425 | 9430 | 9435 | 9440 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 |
| 88 | 9445 | 9450 | 9455 | 9460 | 9465 | 9469 | 9474 | 9479 | 9484 | 9489 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 |
| 89 | 9494 | 9499 | 9504 | 9509 | 9513 | 9518 | 9523 | 9528 | 9533 | 9538 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 |
| 90 | 9542 | 9547 | 9552 | 9557 | 9562 | 9566 | 9571 | 9576 | 9581 | 9586 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 |
| 91 | 9590 | 9595 | 9600 | 9605 | 9609 | 9614 | 9619 | 9624 | 9628 | 9633 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 |
| 92 | 9638 | 9643 | 9647 | 9652 | 9657 | 9661 | 9666 | 9671 | 9675 | 9680 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 |
| 93 | 9685 | 9689 | 9694 | 9699 | 9703 | 9708 | 9713 | 9717 | 9722 | 9727 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 |
| 94 | 9731 | 9736 | 9741 | 9745 | 9750 | 9754 | 9759 | 9763 | 9768 | 9773 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 |
| 95 | 9777 | 9782 | 9786 | 9791 | 9795 | 9800 | 9805 | 9809 | 9814 | 9818 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 |
| 96 | 9823 | 9827 | 9832 | 9836 | 9841 | 9845 | 9850 | 9854 | 9859 | 9863 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 |
| 97 | 9868 | 9872 | 9877 | 9881 | 9886 | 9890 | 9894 | 9899 | 9903 | 9908 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 |
| 98 | 9912 | 9917 | 9921 | 9926 | 9930 | 9934 | 9939 | 9943 | 9948 | 9952 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 |
| 99 | 9956 | 9961 | 9965 | 9969 | 9974 | 9978 | 9983 | 9987 | 9991 | 9996 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 3 | 4 |
| N | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |

## ثانيا : التوزيع الطبيعى القياسى :

APPENDIX



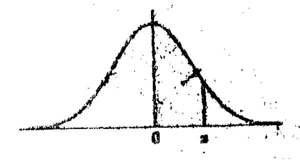
**ORDINATES (Y) of the STANDARD NORMAL CURVE at z**

| z | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.0 | .3989 | .3989 | .3989 | .3988 | .3986 | .3984 | .3982 | .3980 | .3977 | .3973 |
| 0.1 | .3970 | .3965 | .3961 | .3956 | .3951 | .3945 | .3939 | .3932 | .3925 | .3918 |
| 0.2 | .3910 | .3902 | .3894 | .3885 | .3876 | .3867 | .3857 | .3847 | .3836 | .3825 |
| 0.3 | .3814 | .3802 | .3790 | .3778 | .3765 | [illegible] | [illegible] | [illegible] | [illegible] | .3697 |
| 0.4 | .3683 | .3668 | .3653 | .3637 | .3621 | [illegible] | [illegible] | [illegible] | [illegible] | .3538 |
| 0.5 | .3521 | .3503 | .3485 | .3467 | .3448 | .3429 | .3410 | .3391 | .3372 | .3352 |
| 0.6 | .3332 | .3312 | .3292 | .3271 | .3251 | .3230 | .3209 | .3187 | .3166 | .3144 |
| 0.7 | .3123 | .3101 | .3079 | .3056 | .3034 | .3011 | .2989 | .2966 | .2943 | .2920 |
| 0.8 | .2897 | .2874 | .2850 | .2827 | .2803 | [illegible] | [illegible] | [illegible] | [illegible] | .2685 |
| 0.9 | .2661 | .2637 | .2613 | .2589 | .2565 | [illegible] | [illegible] | [illegible] | [illegible] | .2444 |
| 1.0 | .2420 | .2396 | .2371 | .2347 | .2323 | .2299 | .2275 | .2251 | .2227 | .2203 |
| 1.1 | .2179 | .2155 | .2131 | .2107 | .2083 | .2059 | .2036 | .2012 | .1989 | .1965 |
| 1.2 | .1942 | .1919 | .1895 | .1872 | .1849 | .1826 | .1804 | .1781 | .1758 | .1736 |
| 1.3 | .1714 | .1691 | .1669 | .1647 | .1626 | .1604 | .1582 | .1561 | .1539 | .1518 |
| 1.4 | .1497 | .1476 | .1456 | .1435 | .1415 | .1394 | .1374 | .1354 | .1334 | .1315 |
| 1.5 | .1295 | .1276 | .1257 | .1238 | .1219 | .1200 | .1182 | .1163 | .1145 | .1127 |
| 1.6 | .1109 | .1092 | .1074 | .1057 | .1040 | .1023 | .1006 | .0989 | .0973 | .0957 |
| 1.7 | .0940 | .0925 | .0909 | .0893 | .0878 | [illegible] | [illegible] | [illegible] | [illegible] | .0804 |
| 1.8 | .0790 | .0775 | .0761 | .0748 | .0734 | .0721 | .0707 | .0694 | .0681 | .0669 |
| 1.9 | .0656 | .0644 | .0632 | .0620 | .0608 | .0596 | .0584 | .0573 | .0562 | .0551 |
| 2.0 | .0540 | .0529 | .0519 | .0508 | .0498 | .0488 | .0478 | .0468 | .0459 | .0449 |
| 2.1 | .0440 | .0431 | .0422 | .0413 | .0404 | .0396 | .0387 | .0379 | .0371 | .0363 |
| 2.2 | .0355 | .0347 | .0339 | .0332 | .0325 | .0317 | .0310 | .0303 | .0297 | .0290 |
| 2.3 | .0283 | .0277 | .0270 | .0264 | .0258 | .0252 | .0246 | .0241 | .0235 | .0229 |
| 2.4 | .0224 | .0219 | .0213 | .0208 | .0203 | .0198 | .0194 | .0189 | .0184 | .0180 |
| 2.5 | .0175 | .0171 | .0167 | .0163 | .0158 | .0154 | .0151 | .0147 | .0143 | .0139 |
| 2.6 | .0136 | .0132 | .0129 | .0126 | .0122 | .0119 | .0116 | .0113 | .0110 | .0107 |
| 2.7 | .0104 | .0101 | .0099 | .0096 | .0093 | .0091 | .0088 | .0086 | .0084 | .0081 |
| 2.8 | .0079 | .0077 | .0075 | .0073 | .0071 | .0069 | .0067 | .0065 | .0063 | .0061 |
| 2.9 | .0060 | .0058 | .0056 | .0055 | .0053 | .0051 | .0050 | .0048 | .0047 | .0046 |
| 3.0 | .0044 | .0043 | .0042 | .0040 | .0039 | .0038 | .0037 | .0036 | .0035 | .0034 |
| 3.1 | .0033 | .0032 | .0031 | .0030 | .0029 | .0028 | .0027 | .0026 | .0025 | .0025 |
| 3.2 | .0024 | .0023 | .0022 | .0022 | .0021 | .0020 | .0020 | .0019 | .0018 | .0018 |
| 3.3 | .0017 | .0017 | .0016 | .0016 | .0015 | .0015 | .0014 | .0014 | .0013 | .0013 |
| 3.4 | .0012 | .0012 | .0012 | .0011 | .0011 | .0010 | .0010 | .0010 | .0009 | .0009 |
| 3.5 | .0009 | .0008 | .0008 | .0008 | .0008 | .0007 | .0007 | .0007 | .0007 | .0006 |
| 3.6 | .0006 | .0006 | .0006 | .0005 | .0005 | .0005 | .0005 | .0005 | .0005 | .0004 |
| 3.7 | .0004 | .0004 | .0004 | .0004 | .0004 | .0004 | .0003 | .0003 | .0003 | .0003 |
| 3.8 | .0003 | .0003 | .0003 | .0003 | .0003 | .0002 | .0002 | .0002 | .0002 | .0002 |
| 3.9 | .0002 | .0002 | .0002 | .0002 | .0002 | .0002 | .0002 | .0002 | .0001 | .0001 |

## تابع : التوزيع الطبيعى القياسى :

APPENDIX

**AREAS under the STANDARD NORMAL CURVE from 0 to z**

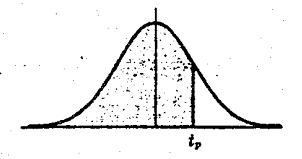



| z | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.0 | .0000 | .0040 | .0080 | .0120 | .0160 | .0199 | .0239 | .0279 | .0319 | .0359 |
| 0.1 | .0398 | .0438 | .0478 | .0517 | .0557 | .0596 | .0636 | .0675 | .0714 | .0754 |
| 0.2 | .0793 | .0832 | .0871 | .0910 | .0948 | .0987 | .1026 | .1064 | .1103 | .1141 |
| 0.3 | .1179 | .1217 | .1255 | .1293 | .1331 | .1368 | .1406 | .1443 | .1480 | .1517 |
| 0.4 | .1554 | .1591 | .1628 | .1664 | .1700 | .1736 | .1772 | .1808 | .1844 | .1879 |
| 0.5 | .1915 | .1950 | .1985 | .2019 | .2054 | .2088 | .2123 | .2157 | .2190 | .2224 |
| 0.6 | .2258 | .2291 | .2324 | .2357 | .2389 | .2422 | .2454 | .2486 | .2518 | .2549 |
| 0.7 | .2580 | .2612 | .2642 | .2673 | .2704 | .2734 | .2764 | .2794 | .2823 | .2852 |
| 0.8 | .2881 | .2910 | .2939 | .2967 | .2996 | .3023 | .3051 | .3078 | .3106 | .3133 |
| 0.9 | .3159 | .3186 | .3212 | .3238 | .3264 | .3289 | .3315 | .3340 | .3365 | .3389 |
| 1.0 | .3413 | .3438 | .3461 | .3485 | .3508 | .3531 | .3554 | .3577 | .3599 | .3621 |
| 1.1 | .3643 | .3665 | .3686 | .3708 | .3729 | .3749 | .3770 | .3790 | .3810 | .3830 |
| 1.2 | .3849 | .3869 | .3888 | .3907 | .3925 | .3944 | .3962 | .3980 | .3997 | .4015 |
| 1.3 | .4032 | .4049 | .4066 | .4082 | .4099 | .4115 | .4131 | .4147 | .4162 | .4177 |
| 1.4 | .4192 | .4207 | .4222 | .4236 | .4251 | .4265 | .4279 | .4292 | .4306 | .4319 |
| 1.5 | .4332 | .4345 | .4357 | .4370 | .4382 | .4394 | .4406 | .4418 | .4429 | .4441 |
| 1.6 | .4452 | .4463 | .4474 | .4484 | .4495 | .4505 | .4515 | .4525 | .4535 | .4545 |
| 1.7 | .4554 | .4564 | .4573 | .4582 | .4591 | .4599 | .4608 | .4616 | .4625 | .4633 |
| 1.8 | .4641 | .4649 | .4656 | .4664 | .4671 | .4678 | .4686 | .4693 | .4699 | .4706 |
| 1.9 | .4713 | .4719 | .4726 | .4732 | .4738 | .4744 | .4750 | .4756 | .4761 | .4767 |
| 2.0 | .4772 | .4778 | .4783 | .4788 | .4793 | .4798 | .4803 | .4808 | .4812 | .4817 |
| 2.1 | .4821 | .4826 | .4830 | .4834 | .4838 | .4842 | .4846 | .4850 | .4854 | .4857 |
| 2.2 | .4861 | .4864 | .4868 | .4871 | .4875 | .4878 | .4881 | .4884 | .4887 | .4890 |
| 2.3 | .4893 | .4896 | .4898 | .4901 | .4904 | .4906 | .4909 | .4911 | .4913 | .4916 |
| 2.4 | .4918 | .4920 | .4922 | .4925 | .4927 | .4929 | .4931 | .4932 | .4934 | .4936 |
| 2.5 | .4938 | .4940 | .4941 | .4943 | .4945 | .4946 | .4948 | .4949 | .4951 | .4952 |
| 2.6 | .4953 | .4955 | .4956 | .4957 | .4959 | .4960 | .4961 | .4962 | .4963 | .4964 |
| 2.7 | .4965 | .4966 | .4967 | .4968 | .4969 | .4970 | .4971 | .4972 | .4973 | .4974 |
| 2.8 | .4974 | .4975 | .4976 | .4977 | .4977 | .4978 | .4979 | .4979 | .4980 | .4981 |
| 2.9 | .4981 | .4982 | .4982 | .4983 | .4984 | .4984 | .4985 | .4985 | .4986 | .4986 |
| 3.0 | .4987 | .4987 | .4987 | .4988 | .4988 | .4989 | .4989 | .4989 | .4990 | .4990 |
| 3.1 | .4990 | .4991 | .4991 | .4991 | .4992 | .4992 | .4992 | .4992 | .4993 | .4993 |
| 3.2 | .4993 | .4993 | .4994 | .4994 | .4994 | .4994 | .4994 | .4995 | .4995 | .4995 |
| 3.3 | .4995 | .4995 | .4995 | .4996 | .4996 | .4996 | .4996 | .4996 | .4996 | .4997 |
| 3.4 | .4997 | .4997 | .4997 | .4997 | .4997 | .4997 | .4997 | .4997 | .4997 | .4998 |
| 3.5 | .4998 | .4998 | .4998 | .4998 | .4998 | .4998 | .4998 | .4998 | .4998 | .4998 |
| 3.6 | .4998 | .4998 | .4999 | .4999 | .4999 | .4999 | .4999 | .4999 | .4999 | .4999 |
| 3.7 | .4999 | .4999 | .4999 | .4999 | .4999 | .4999 | .4999 | .4999 | .4999 | .4999 |
| 3.8 | .4999 | .4999 | .4999 | .4999 | .4999 | .4999 | .4999 | .4999 | .4999 | .4999 |
| 3.9 | .5000 | .5000 | .5000 | .5000 | .5000 | .5000 | .5000 | .5000 | .5000 | .5000 |

## ثالثا : توزيـــع - t

APPENDIX

**PERCENTILE VALUES ($t_p$)**
**for**
**STUDENT'S $t$ DISTRIBUTION**
**with $\nu$ degrees of freedom**
**(shaded area = $p$)**



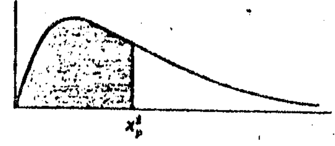

| $\nu$ | $t_{.995}$ | $t_{.99}$ | $t_{.975}$ | $t_{.95}$ | $t_{.90}$ | $t_{.80}$ | $t_{.75}$ | $t_{.70}$ | $t_{.60}$ | $t_{.55}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 63.66 | 31.82 | 12.71 | 6.31 | 3.08 | 1.376 | 1.000 | .727 | .325 | .158 |
| 2 | 9.92 | 6.96 | 4.30 | 2.92 | 1.89 | 1.061 | .816 | .617 | .289 | .142 |
| 3 | 5.84 | 4.54 | 3.18 | 2.35 | 1.64 | .978 | .765 | .584 | .277 | .137 |
| 4 | 4.60 | 3.75 | 2.78 | 2.13 | 1.53 | .941 | .741 | .569 | .271 | .134 |
| 5 | 4.03 | 3.36 | 2.57 | 2.02 | 1.48 | .920 | .727 | .559 | .267 | .132 |
| 6 | 3.71 | 3.14 | 2.45 | 1.94 | 1.44 | .906 | .718 | .553 | .265 | .131 |
| 7 | 3.50 | 3.00 | 2.36 | 1.90 | 1.42 | .896 | .711 | .549 | .263 | .130 |
| 8 | 3.36 | 2.90 | 2.31 | 1.86 | 1.40 | .889 | .706 | .546 | .262 | .130 |
| 9 | 3.25 | 2.82 | 2.26 | 1.83 | 1.38 | .883 | .703 | .543 | .261 | .129 |
| 10 | 3.17 | 2.76 | 2.23 | 1.81 | 1.37 | .879 | .700 | .542 | .260 | .129 |
| 11 | 3.11 | 2.72 | 2.20 | 1.80 | 1.36 | .876 | .697 | .540 | .260 | .129 |
| 12 | 3.06 | 2.68 | 2.18 | 1.78 | 1.36 | .873 | .695 | .539 | .259 | .128 |
| 13 | 3.01 | 2.65 | 2.16 | 1.77 | 1.35 | .870 | .694 | .538 | .259 | .128 |
| 14 | 2.98 | 2.62 | 2.14 | 1.76 | 1.34 | .868 | .692 | .537 | .258 | .128 |
| 15 | 2.95 | 2.60 | 2.13 | 1.75 | 1.34 | .866 | .691 | .536 | .258 | .128 |
| 16 | 2.92 | 2.58 | 2.12 | 1.75 | 1.34 | .865 | .690 | .535 | .258 | .128 |
| 17 | 2.90 | 2.57 | 2.11 | 1.74 | 1.33 | .863 | .689 | .534 | .257 | .128 |
| 18 | 2.88 | 2.55 | 2.10 | 1.73 | 1.33 | .862 | .688 | .534 | .257 | .127 |
| 19 | 2.86 | 2.54 | 2.09 | 1.73 | 1.33 | .861 | .688 | .533 | .257 | .127 |
| 20 | 2.84 | 2.53 | 2.09 | 1.72 | 1.32 | .860 | .687 | .533 | .257 | .127 |
| 21 | 2.83 | 2.52 | 2.08 | 1.72 | 1.32 | .859 | .686 | .532 | .257 | .127 |
| 22 | 2.82 | 2.51 | 2.07 | 1.72 | 1.32 | .858 | .686 | .532 | .256 | .127 |
| 23 | 2.81 | 2.50 | 2.07 | 1.71 | 1.32 | .858 | .685 | .532 | .256 | .127 |
| 24 | 2.80 | 2.49 | 2.06 | 1.71 | 1.32 | .857 | .685 | .531 | .256 | .127 |
| 25 | 2.79 | 2.48 | 2.06 | 1.71 | 1.32 | .856 | .684 | .531 | .256 | .127 |
| 26 | 2.78 | 2.48 | 2.06 | 1.71 | 1.32 | .856 | .684 | .531 | .256 | .127 |
| 27 | 2.77 | 2.47 | 2.05 | 1.70 | 1.31 | .855 | .684 | .531 | .256 | .127 |
| 28 | 2.76 | 2.47 | 2.05 | 1.70 | 1.31 | .855 | .683 | .530 | .256 | .127 |
| 29 | 2.76 | 2.46 | 2.04 | 1.70 | 1.31 | .854 | .683 | .530 | .256 | .127 |
| 30 | 2.75 | 2.46 | 2.04 | 1.70 | 1.31 | .854 | .683 | .530 | .256 | .127 |
| 40 | 2.70 | 2.42 | 2.02 | 1.68 | 1.30 | .851 | .681 | .529 | .255 | .126 |
| 60 | 2.66 | 2.39 | 2.00 | 1.67 | 1.30 | .848 | .679 | .527 | .254 | .126 |
| 120 | 2.62 | 2.36 | 1.98 | 1.66 | 1.29 | .845 | .677 | .526 | .254 | .126 |
| ∞ | 2.58 | 2.33 | 1.96 | 1.645 | 1.28 | .842 | .674 | .524 | .253 | .126 |

*Source:* R. A. Fisher and F. Yates, ***Statistical Tables for Biological, Agricultural and Medical Research*** (5th edition), Table III, Oliver and Boyd Ltd., Edinburgh, by permission of the authors and publishers.

## رابعا : توزیع مربع - کای



### PERCENTILE VALUES ($\chi^2_p$) for THE CHI-SQUARE DISTRIBUTION with $\nu$ degrees of freedom (shaded area = $p$)




| $\nu$ | $\chi^2_{.995}$ | $\chi^2_{.99}$ | $\chi^2_{.975}$ | $\chi^2_{.95}$ | $\chi^2_{.90}$ | $\chi^2_{.75}$ | $\chi^2_{.50}$ | $\chi^2_{.25}$ | $\chi^2_{.10}$ | $\chi^2_{.05}$ | $\chi^2_{.025}$ | $\chi^2_{.01}$ | $\chi^2_{.005}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 7.88 | 6.63 | 5.02 | 3.84 | 2.71 | 1.32 | .455 | .102 | .0158 | .0039 | .0010 | .0002 | .0000 |
| 2 | 10.6 | 9.21 | 7.38 | 5.99 | 4.61 | 2.77 | 1.39 | .575 | .211 | .103 | .0506 | .0201 | .0100 |
| 3 | 12.8 | 11.3 | 9.35 | 7.81 | 6.25 | 4.11 | 2.37 | 1.21 | .584 | .352 | .216 | .115 | .072 |
| 4 | 14.9 | 13.3 | 11.1 | 9.49 | 7.78 | 5.39 | 3.36 | 1.92 | 1.06 | .711 | .484 | .297 | .207 |
| 5 | 16.7 | 15.1 | 12.8 | 11.1 | 9.24 | 6.63 | 4.35 | 2.67 | 1.61 | 1.15 | .831 | .554 | .412 |
| 6 | 18.5 | 16.8 | 14.4 | 12.6 | 10.6 | 7.84 | 5.35 | 3.45 | 2.20 | 1.64 | 1.24 | .872 | .676 |
| 7 | 20.3 | 18.5 | 16.0 | 14.1 | 12.0 | 9.04 | 6.35 | 4.25 | 2.83 | 2.17 | 1.69 | 1.24 | .989 |
| 8 | 22.0 | 20.1 | 17.5 | 15.5 | 13.4 | 10.2 | 7.34 | 5.07 | 3.49 | 2.73 | 2.18 | 1.65 | 1.34 |
| 9 | 23.6 | 21.7 | 19.0 | 16.9 | 14.7 | 11.4 | 8.34 | 5.90 | 4.17 | 3.33 | 2.70 | 2.09 | 1.73 |
| 10 | 25.2 | 23.2 | 20.5 | 18.3 | 16.0 | 12.5 | 9.34 | 6.74 | 4.87 | 3.94 | 3.25 | 2.56 | 2.16 |
| 11 | 26.8 | 24.7 | 21.9 | 19.7 | 17.3 | 13.7 | 10.3 | 7.58 | 5.58 | 4.57 | 3.82 | 3.05 | 2.60 |
| 12 | 28.3 | 26.2 | 23.3 | 21.0 | 18.5 | 14.8 | 11.3 | 8.44 | 6.30 | 5.23 | 4.40 | 3.57 | 3.07 |
| 13 | 29.8 | 27.7 | 24.7 | 22.4 | 19.8 | 16.0 | 12.3 | 9.30 | 7.04 | 5.89 | 5.01 | 4.11 | 3.57 |
| 14 | 31.3 | 29.1 | 26.1 | 23.7 | 21.1 | 17.1 | 13.3 | 10.2 | 7.79 | 6.57 | 5.63 | 4.66 | 4.07 |
| 15 | 32.8 | 30.6 | 27.5 | 25.0 | 22.3 | 18.2 | 14.3 | 11.0 | 8.55 | 7.26 | 6.26 | 5.23 | 4.60 |
| 16 | 34.3 | 32.0 | 28.8 | 26.3 | 23.5 | 19.4 | 15.3 | 11.9 | 9.31 | 7.96 | 6.91 | 5.81 | 5.14 |
| 17 | 35.7 | 33.4 | 30.2 | 27.6 | 24.8 | 20.5 | 16.3 | 12.8 | 10.1 | 8.67 | 7.56 | 6.41 | 5.70 |
| 18 | 37.2 | 34.8 | 31.5 | 28.9 | 26.0 | 21.6 | 17.3 | 13.7 | 10.9 | 9.39 | 8.23 | 7.01 | 6.26 |
| 19 | 38.6 | 36.2 | 32.9 | 30.1 | 27.2 | 22.7 | 18.3 | 14.6 | 11.7 | 10.1 | 8.91 | 7.63 | 6.84 |
| 20 | 40.0 | 37.6 | 34.2 | 31.4 | 28.4 | 23.8 | 19.3 | 15.5 | 12.4 | 10.9 | 9.59 | 8.26 | 7.43 |
| 21 | 41.4 | 38.9 | 35.5 | 32.7 | 29.6 | 24.9 | 20.3 | 16.3 | 13.2 | 11.6 | 10.3 | 8.90 | 8.03 |
| 22 | 42.8 | 40.3 | 36.8 | 33.9 | 30.8 | 26.0 | 21.3 | 17.2 | 14.0 | 12.3 | 11.0 | 9.54 | 8.64 |
| 23 | 44.2 | 41.6 | 38.1 | 35.2 | 32.0 | 27.1 | 22.3 | 18.1 | 14.8 | 13.1 | 11.7 | 10.2 | 9.26 |
| 24 | 45.6 | 43.0 | 39.4 | 36.4 | 33.2 | 28.2 | 23.3 | 19.0 | 15.7 | 13.8 | 12.4 | 10.9 | 9.89 |
| 25 | 46.9 | 44.3 | 40.6 | 37.7 | 34.4 | 29.3 | 24.3 | 19.9 | 16.5 | 14.6 | 13.1 | 11.5 | 10.5 |
| 26 | 48.3 | 45.6 | 41.9 | 38.9 | 35.6 | 30.4 | 25.3 | 20.8 | 17.3 | 15.4 | 13.8 | 12.2 | 11.2 |
| 27 | 49.6 | 47.0 | 43.2 | 40.1 | 36.7 | 31.5 | 26.3 | 21.7 | 18.1 | 16.2 | 14.6 | 12.9 | 11.8 |
| 28 | 51.0 | 48.3 | 44.5 | 41.3 | 37.9 | 32.6 | 27.3 | 22.7 | 18.9 | 16.9 | 15.3 | 13.6 | 12.5 |
| 29 | 52.3 | 49.6 | 45.7 | 42.6 | 39.1 | 33.7 | 28.3 | 23.6 | 19.8 | 17.7 | 16.0 | 14.3 | 13.1 |
| 30 | 53.7 | 50.9 | 47.0 | 43.8 | 40.3 | 34.8 | 29.3 | 24.5 | 20.6 | 18.5 | 16.8 | 15.0 | 13.8 |
| 40 | 66.8 | 63.7 | 59.3 | 55.8 | 51.8 | 45.6 | 39.3 | 33.7 | 29.1 | 26.5 | 24.4 | 22.2 | 20.7 |
| 50 | 79.5 | 76.2 | 71.4 | 67.5 | 63.2 | 56.3 | 49.3 | 42.9 | 37.7 | 34.8 | 32.4 | 29.7 | 28.0 |
| 60 | 92.0 | 88.4 | 83.3 | 79.1 | 74.4 | 67.0 | 59.3 | 52.3 | 46.5 | 43.2 | 40.5 | 37.5 | 35.5 |
| 70 | 104.2 | 100.4 | 95.0 | 90.5 | 85.5 | 77.6 | 69.3 | 61.7 | 55.3 | 51.7 | 48.8 | 45.4 | 43.3 |
| 80 | 116.3 | 112.3 | 106.6 | 101.9 | 96.6 | 88.1 | 79.3 | 71.1 | 64.3 | 60.4 | 57.2 | 53.5 | 51.2 |
| 90 | 128.3 | 124.1 | 118.1 | 113.1 | 107.6 | 98.6 | 89.3 | 80.6 | 73.3 | 69.1 | 65.6 | 61.8 | 59.2 |
| 100 | 140.2 | 135.8 | 129.6 | 124.3 | 118.5 | 109.1 | 99.3 | 90.1 | 82.4 | 77.9 | 74.2 | 70.1 | 67.3 |

*Source:* Catherine M. Thompson, *Table of percentage points of the $\chi^2$ distribution*, Biometrika, Vol. 32 (1941), by permission of the author and publisher.

## خامسا : توزيع بواسون

APPENDIX

### VALUES of $e^{-\lambda}$

$(0 < \lambda < 1)$

| $\lambda$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.0 | 1.0000 | .9900 | .9802 | .9704 | .9608 | .9512 | .9418 | .9324 | .9231 | .9139 |
| 0.1 | .5048 | .8953 | .8869 | .8781 | .8694 | .8607 | .8521 | .8437 | .8353 | .8270 |
| 0.2 | .8187 | .8106 | .8025 | .7945 | .7866 | .7788 | .7711 | .7634 | .7558 | .7483 |
| 0.3 | .7408 | .7334 | .7261 | .7189 | .7118 | .7047 | .6977 | .6907 | .6839 | .6771 |
| 0.4 | .6703 | .6636 | .6570 | .6505 | .6440 | .6376 | .6313 | .6250 | .6188 | .6126 |
| 0.5 | .6065 | .6005 | .5945 | .5886 | .5827 | .5770 | .5712 | .5655 | .5599 | .5543 |
| 0.6 | .5488 | .5434 | .5379 | .5326 | .5273 | .5220 | .5169 | .5117 | .5066 | .5016 |
| 0.7 | .4966 | .4916 | .4868 | .4819 | .4771 | .4724 | .4677 | .4630 | .4584 | .4538 |
| 0.8 | .4493 | .4449 | .4404 | .4360 | .4317 | .4274 | .4232 | .4190 | .4148 | .4107 |
| 0.9 | .4066 | .4025 | .3985 | .3946 | .3906 | .3867 | .3829 | .3791 | .3753 | .3716 |

$(\lambda = 1, 2, 3, \ldots, 10)$

| $\lambda$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $e^{-\lambda}$ | [illegible] | .13534 | .04979 | .01832 | .006738 | .002479 | .000912 | [illegible] | .000123 | [illegible] |

*Note:* To obtain values of $e^{-\lambda}$ for other values of $\lambda$, use the laws of exponents.

Example: $e^{-3.40} = (e^{-3.00})(e^{-0.40})$ = (.04979)(.6703) = [illegible].

## سادسا : الارقام العشوائية :

### APPENDIX

### RANDOM NUMBERS

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 51772 | 74640 | 42831 | 20044 | 40621 | 62808 | 98582 | 04186 | 19640 | 87056 |
| 24033 | 23491 | 83587 | 06568 | 21960 | 21387 | 76105 | 10868 | 97453 | 90581 |
| 45939 | 60173 | 52078 | 25424 | 11645 | 55870 | 56974 | 37428 | 93507 | 94271 |
| 30586 | 02133 | 75797 | 45406 | 31041 | 86707 | 12978 | 17169 | 88116 | 42187 |
| 03585 | 79353 | 81938 | 82322 | 96799 | 85659 | 36081 | 50884 | 14070 | 74950 |
| 64937 | 03355 | 95863 | 20790 | 65304 | 55189 | 00746 | 65253 | 11822 | 15804 |
| 15630 | 64759 | 51135 | 98527 | 62586 | 41889 | 25439 | 88036 | 24034 | 67283 |
| 09448 | 56301 | 57683 | 30277 | 94623 | 85418 | 68829 | 06652 | 41982 | 49169 |
| 21631 | 91157 | 77331 | 60710 | 52299 | 16835 | 48668 | 71590 | 16159 | 14676 |
| 91097 | 17480 | 29414 | 06829 | 87843 | 26195 | 27279 | 47152 | 35683 | 47280 |
| 50532 | 25496 | 95652 | 42457 | 73547 | 76552 | 50020 | 24819 | 52984 | 76168 |
| 07136 | 40876 | 79971 | 54195 | 25708 | 51817 | 80782 | 72484 | 94923 | 75936 |
| 27959 | 64728 | 10744 | 08396 | 56242 | 90056 | 26808 | 99431 | 50995 | 20507 |
| 85184 | 73949 | 36601 | 46258 | 00477 | 25234 | 09908 | 36574 | 72139 | 70185 |
| 54398 | 21154 | 97810 | 36764 | 32869 | 11785 | 55261 | 59009 | 38714 | 38723 |
| 65544 | 34371 | 09591 | 07839 | 58892 | 92843 | 72828 | 93341 | 84621 | 63886 |
| 08263 | 65052 | 85762 | 64236 | 39238 | 18776 | 84503 | 99247 | 46149 | 03229 |
| 39817 | 67906 | 48236 | 16057 | 81812 | 15815 | 63700 | 85915 | 19219 | 45943 |
| 62257 | 04077 | 79443 | 95203 | 02479 | 30763 | 92486 | 54088 | 23631 | 05825 |
| 53298 | 90276 | 62545 | 21944 | 16530 | 03878 | 07516 | 95716 | 02526 | 33537 |

## سابعا : توزيع ـ ف

Percentage Points of the F-Distribution — جدول ١٧ : قيم F الجدولية

### F Distribution: 5 per cent Points.

| $\nu_2$ \ $\nu_1$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 161.45 | 199.50 | 215.71 | 224.58 | 230.16 | 233.99 | 236.77 | 238.88 | 240.54 |
| 2 | 18.513 | 19.000 | 19.164 | 19.247 | 19.296 | [illegible] | 19.353 | 19.371 | 19.385 |
| 3 | 10.128 | 9.5521 | 9.2766 | 9.1172 | 9.0135 | 8.9406 | 8.8868 | 8.8452 | 8.8123 |
| 4 | 7.7086 | 6.9443 | 6.5914 | 6.3883 | 6.2560 | 6.1631 | 6.0942 | 6.0410 | 5.9988 |
| 5 | 6.6079 | 5.7861 | 5.4095 | 5.1922 | 5.0503 | 4.9503 | 4.8759 | 4.8183 | 4.7725 |
| 6 | 5.9874 | 5.1433 | 4.7571 | 4.5337 | 4.3874 | 4.2839 | 4.2066 | 4.1468 | 4.0990 |
| 7 | 5.5914 | 4.7374 | 4.3468 | 4.1203 | 3.9715 | 3.8660 | 3.7870 | 3.7257 | 3.6767 |
| 8 | 5.3177 | 4.4590 | 4.0662 | 3.8378 | 3.6875 | [illegible] | [illegible] | 3.4381 | 3.3881 |
| 9 | 5.1174 | 4.2565 | 3.8626 | 3.6331 | 3.4817 | 3.3738 | 3.2927 | 3.2296 | 3.1789 |
| 10 | 4.9646 | 4.1028 | 3.7083 | 3.4780 | 3.3258 | 3.2172 | 3.1355 | 3.0717 | 3.0204 |
| 11 | 4.8443 | 3.9823 | 3.5874 | 3.3567 | 3.2039 | 3.0946 | 3.0123 | 2.9480 | 2.8962 |
| 12 | 4.7472 | 3.8853 | 3.4903 | 3.2592 | 3.1059 | 2.9961 | 2.9134 | 2.8486 | 2.7964 |
| 13 | 4.6672 | 3.8056 | 3.4105 | 3.1791 | 3.0254 | 2.9153 | 2.8321 | 2.7669 | 2.7144 |
| 14 | 4.6001 | 3.7389 | 3.3439 | 3.1122 | 2.9582 | 2.8477 | 2.7642 | 2.6987 | 2.6458 |
| 15 | 4.5431 | 3.6823 | 3.2874 | 3.0556 | 2.9013 | 2.7905 | 2.7066 | 2.6408 | 2.5876 |
| 16 | 4.4940 | 3.6337 | 3.2389 | 3.0069 | 2.8524 | 2.7413 | 2.6572 | 2.5911 | 2.5377 |
| 17 | 4.4513 | 3.5915 | 3.1968 | 2.9647 | 2.8100 | 2.6987 | [illegible] | 2.5480 | 2.4943 |
| 18 | 4.4139 | 3.5546 | 3.1599 | 2.9277 | 2.7729 | 2.6613 | 2.5767 | 2.5102 | 2.4563 |
| 19 | 4.3808 | 3.5219 | 3.1274 | 2.8951 | 2.7401 | 2.6283 | 2.5435 | 2.4768 | 2.4227 |
| 20 | 4.3513 | 3.4928 | 3.0984 | 2.8661 | 2.7109 | 2.5990 | 2.5140 | 2.4471 | 2.3928 |
| 21 | 4.3248 | 3.4668 | 3.0725 | 2.8401 | 2.6848 | 2.5757 | 2.4876 | 2.4205 | 2.3661 |
| 22 | 4.3009 | 3.4434 | 3.0491 | 2.8167 | 2.6613 | 2.5491 | 2.4638 | 2.3965 | 2.3419 |
| 23 | 4.2793 | 3.4221 | 3.0280 | 2.7955 | 2.6400 | 2.5277 | 2.4422 | 2.3748 | 2.3201 |
| 24 | 4.2597 | 3.4028 | 3.0088 | 2.7763 | 2.6207 | 2.5082 | 2.4226 | 2.3551 | 2.3002 |
| 25 | 4.2417 | 3.3852 | 2.9912 | 2.7587 | 2.6030 | 2.4904 | 2.4047 | 2.3371 | 2.2821 |
| 26 | 4.2252 | 3.3690 | 2.9751 | 2.7426 | 2.5868 | 2.4741 | 2.3883 | 2.3205 | 2.2655 |
| 27 | 4.2100 | 3.3541 | 2.9604 | 2.7278 | 2.5719 | 2.4591 | 2.3732 | 2.3053 | 2.2501 |
| 28 | 4.1960 | 3.3404 | 2.9467 | 2.7141 | 2.5581 | 2.4453 | 2.3593 | 2.2913 | 2.2360 |
| 29 | 4.1830 | 3.3277 | 2.9340 | 2.7014 | 2.5454 | 2.4324 | 2.3463 | 2.2782 | 2.2229 |
| 30 | 4.1709 | 3.3158 | 2.9223 | 2.6896 | 2.5336 | 2.4205 | 2.3343 | 2.2662 | 2.2107 |
| 40 | 4.0848 | 3.2317 | 2.8387 | 2.6060 | 2.4495 | 2.3359 | 2.2490 | 2.1802 | 2.1240 |
| 60 | 4.0012 | 3.1504 | 2.7581 | 2.5252 | 2.3683 | 2.2540 | 2.1665 | 2.0970 | 2.0401 |
| 120 | 3.9201 | 3.0718 | 2.6802 | 2.4472 | 2.2900 | 2.1750 | 2.0867 | 2.0164 | 1.9588 |
| ∞ | 3.8415 | 2.9957 | 2.6049 | 2.3719 | 2.2141 | 2.0986 | 2.0096 | 1.9384 | 1.8799 |

تابع : توزيع - ف

(Cont.)

F Distribution: 5 per cent Points

| $\nu_2$ \ $\nu_1$ | 10 | 12 | 15 | 20 | 24 | 30 | 40 | 60 | 120 | ∞ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 241.88 | 243.91 | 245.95 | 248.01 | 249.05 | 250.09 | 251.14 | 252.20 | 253.25 | 254.32 |
| 2 | 19.396 | 19.413 | 19.429 | 19.446 | 19.454 | 19.462 | 19.471 | 19.479 | 19.487 | 19.496 |
| 3 | 8.7855 | 8.7446 | 8.7029 | 8.6602 | 8.6385 | 8.6166 | 8.5944 | 8.5720 | 8.5494 | 8.5265 |
| 4 | 5.9644 | 5.9117 | 5.8578 | 5.8025 | 5.7744 | 5.7459 | 5.7170 | 5.6878 | 5.6581 | 5.6281 |
| 5 | 4.7351 | 4.6777 | 4.6188 | 4.5581 | 4.5272 | 4.4957 | 4.4638 | 4.4314 | 4.3984 | 4.3650 |
| 6 | 4.0600 | 3.9999 | 3.9381 | 3.8742 | 3.8415 | 3.8082 | 3.7743 | 3.7398 | 3.7047 | 3.6688 |
| 7 | 3.6365 | 3.5747 | 3.5108 | 3.4445 | 3.4105 | 3.3758 | 3.3404 | 3.3043 | 3.2674 | 3.2298 |
| 8 | 3.3472 | 3.2840 | 3.2184 | 3.1503 | 3.1152 | 3.0794 | 3.0428 | 3.0053 | 2.9669 | 2.9276 |
| 9 | 3.1373 | 3.0729 | 3.0061 | 2.9365 | 2.9005 | 2.8637 | 2.8259 | 2.7872 | 2.7475 | 2.7067 |
| 10 | 2.9782 | 2.9130 | 2.8450 | 2.7740 | 2.7372 | 2.6996 | 2.6609 | 2.6211 | 2.5801 | 2.5379 |
| 11 | 2.8536 | 2.7876 | 2.7186 | 2.6464 | 2.6090 | 2.5705 | 2.5309 | 2.4901 | 2.4480 | 2.4045 |
| 12 | 2.7534 | 2.6866 | 2.6169 | 2.5436 | 2.5055 | 2.4663 | 2.4259 | 2.3842 | 2.3410 | 2.2962 |
| 13 | 2.6710 | 2.6037 | 2.5331 | 2.4589 | 2.4202 | 2.3803 | 2.3392 | 2.2966 | 2.2524 | 2.2064 |
| 14 | 2.6021 | 2.5342 | 2.4630 | 2.3879 | 2.3487 | 2.3082 | 2.2664 | 2.2230 | 2.1778 | 2.1307 |
| 15 | 2.5437 | 2.4753 | 2.4035 | 2.3275 | 2.2878 | 2.2468 | 2.2043 | 2.1601 | 2.1141 | 2.0658 |
| 16 | 2.4935 | 2.4247 | 2.3522 | 2.2756 | 2.2354 | 2.1938 | 2.1507 | 2.1058 | 2.0589 | 2.0096 |
| 17 | 2.4499 | 2.3807 | 2.3077 | 2.2304 | 2.1898 | 2.1477 | 2.1040 | 2.0584 | 2.0107 | 1.9604 |
| 18 | 2.4117 | 2.3421 | 2.2686 | 2.1906 | 2.1497 | 2.1071 | 2.0629 | 2.0166 | 1.9681 | 1.9168 |
| 19 | 2.3779 | 2.3080 | 2.2341 | 2.1555 | 2.1141 | 2.0712 | 2.0264 | 1.9796 | 1.9302 | 1.8780 |
| 20 | 2.3479 | 2.2776 | 2.2033 | 2.1242 | 2.0825 | 2.0391 | 1.9938 | 1.9464 | 1.8963 | 1.8432 |
| 21 | 2.3210 | 2.2504 | 2.1757 | 2.0960 | 2.0540 | 2.0102 | 1.9645 | 1.9165 | 1.8657 | 1.8117 |
| 22 | 2.2967 | 2.2258 | 2.1508 | 2.0707 | 2.0283 | 1.9842 | 1.9380 | 1.8895 | 1.8380 | 1.7831 |
| 23 | 2.2747 | 2.2036 | 2.1282 | 2.0476 | 2.0050 | 1.9605 | 1.9139 | 1.8649 | 1.8128 | 1.7570 |
| 24 | 2.2547 | 2.1834 | 2.1077 | 2.0267 | 1.9838 | 1.9390 | 1.8920 | 1.8424 | 1.7897 | 1.7331 |
| 25 | 2.2365 | 2.1649 | 2.0889 | 2.0075 | 1.9643 | 1.9192 | 1.8718 | 1.8217 | 1.7684 | 1.7110 |
| 26 | 2.2197 | 2.1479 | 2.0716 | 1.9898 | 1.9464 | 1.9010 | 1.8533 | 1.8027 | 1.7488 | 1.6906 |
| 27 | 2.2043 | 2.1323 | 2.0558 | 1.9736 | 1.9299 | 1.8842 | 1.8361 | 1.7851 | 1.7307 | 1.6717 |
| 28 | 2.1900 | 2.1179 | 2.0411 | 1.9586 | 1.9147 | 1.8687 | 1.8203 | 1.7689 | 1.7138 | 1.6541 |
| 29 | 2.1768 | 2.1045 | 2.0275 | 1.9446 | 1.9005 | 1.8543 | 1.8055 | 1.7537 | 1.6981 | 1.6377 |
| 30 | 2.1646 | 2.0921 | 2.0148 | 1.9317 | 1.8874 | 1.8409 | 1.7918 | 1.7396 | 1.6835 | 1.6223 |
| 40 | 2.0772 | 2.0035 | 1.9245 | 1.8389 | 1.7929 | 1.7444 | 1.6928 | 1.6373 | 1.5766 | 1.5089 |
| 60 | 1.9926 | 1.9174 | 1.8364 | 1.7480 | 1.7001 | 1.6491 | 1.5943 | 1.5343 | 1.4673 | 1.3893 |
| 120 | 1.9105 | 1.8337 | 1.7505 | 1.6587 | 1.6084 | 1.5543 | 1.4952 | 1.4290 | 1.3519 | 1.2539 |
| ∞ | 1.8307 | 1.7522 | 1.6664 | 1.5705 | 1.5173 | 1.4591 | 1.3940 | 1.3180 | 1.2214 | 1.0000 |

## تابع : توزيع ـ ف

(Cont.)

*F* D[illegible]BUTION: 1 PER CENT [illegible]TS

| $\nu_2$ \ $\nu_1$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 4052.2 | 4999.5 | 5403.3 | 5624.6 | 5763.7 | 5859.0 | 5928.3 | 5981.6 | 6022.5 |
| 2 | 98.503 | 99.000 | 99.166 | 99.249 | 99.299 | 99.332 | 99.356 | 99.374 | 99.388 |
| 3 | 34.116 | 30.817 | 29.457 | 28.710 | 28.237 | 27.911 | 27.672 | 27.489 | 27.345 |
| 4 | 21.198 | 18.000 | 16.694 | 15.977 | 15.522 | 15.207 | 14.976 | 14.799 | 14.659 |
| 5 | 16.258 | 13.274 | 12.060 | 11.392 | 10.967 | 10.672 | 10.456 | 10.289 | 10.158 |
| 6 | 13.745 | 10.925 | 9.7795 | 9.1483 | 8.7459 | 8.4661 | 8.2600 | 8.1016 | 7.9761 |
| 7 | 12.246 | 9.5466 | 8.4513 | 7.8467 | 7.4604 | 7.1914 | 6.9928 | 6.8401 | 6.7188 |
| 8 | 11.259 | 8.6491 | 7.5910 | 7.0060 | 6.6318 | 6.3707 | 6.1776 | 6.0289 | 5.9106 |
| 9 | 10.561 | 8.0215 | 6.9919 | 6.4221 | 6.0569 | 5.8018 | 5.6129 | 5.4671 | 5.3511 |
| 10 | 10.044 | 7.5594 | 6.5523 | 5.9943 | 5.6363 | 5.3858 | 5.2001 | 5.0567 | 4.9424 |
| 11 | 9.6460 | 7.2057 | 6.2167 | 5.6683 | 5.3160 | 5.0692 | 4.8861 | 4.7445 | 4.6315 |
| 12 | 9.3302 | 6.9266 | 5.9526 | 5.4119 | 5.0643 | 4.8206 | 4.6395 | 4.4994 | 4.3875 |
| 13 | 9.0738 | 6.7010 | 5.7394 | 5.2053 | 4.8616 | 4.6204 | 4.4410 | 4.3021 | 4.1911 |
| 14 | 8.8616 | 6.5149 | 5.5639 | 5.0354 | 4.6950 | 4.4558 | 4.2779 | 4.1399 | 4.0297 |
| 15 | 8.6831 | 6.3589 | 5.4170 | 7.8932 | 4.5556 | 4.3183 | 4.1415 | 4.0045 | 3.8948 |
| 16 | 8.5310 | 6.2262 | 5.2922 | 4.7726 | 4.4374 | 4.2016 | 4.0259 | 3.8896 | 3.7804 |
| 17 | 8.3997 | 6.1121 | 5.1850 | 4.6690 | 4.3359 | 4.1015 | 3.9267 | 3.7910 | 3.6822 |
| 18 | 8.2854 | 6.0129 | 5.0919 | 4.5790 | 4.2479 | 4.0146 | 3.8406 | 3.7054 | 3.5971 |
| 19 | 8.1850 | 5.9259 | 5.0103 | 4.5003 | 4.1708 | 3.9386 | 3.7653 | 3.6305 | 3.5225 |
| 20 | 8.0960 | 5.8489 | 4.9382 | 4.4307 | 4.1027 | 3.8714 | 3.6987 | 3.5644 | 3.4567 |
| 21 | 8.0166 | 5.7804 | 4.8740 | 4.3688 | 4.0421 | 3.8117 | 3.6396 | 3.5056 | 3.3981 |
| 22 | 7.9454 | 5.7190 | 4.8166 | 4.3134 | 3.9880 | 3.7583 | 3.5867 | 3.4530 | 3.3458 |
| 23 | 7.8811 | 5.6637 | 4.7649 | 4.2635 | 3.9392 | 3.7102 | 3.5390 | 3.4057 | 3.2986 |
| 24 | 7.8229 | 5.6136 | 4.7181 | 4.2184 | 3.8951 | 3.6667 | 3.4959 | 3.3629 | 3.2560 |
| 25 | 7.7698 | 5.5680 | 4.6755 | 4.1774 | 3.8550 | 3.6272 | 3.4568 | 3.3239 | 3.2172 |
| 26 | 7.7218 | 5.5263 | 4.6366 | 4.1400 | 3.8183 | 3.5911 | 3.4210 | 3.2884 | 3.1818 |
| 27 | 7.6767 | 5.4881 | 4.6009 | 4.1056 | 3.7848 | 3.5580 | 3.3882 | 3.2558 | 3.1494 |
| 28 | 7.6356 | 5.4529 | 4.5681 | 4.0740 | 3.7539 | 3.5276 | 3.3581 | 3.2259 | 3.1195 |
| 29 | 7.5976 | 5.4205 | 4.5378 | 4.0449 | 3.7254 | 3.4995 | 3.3302 | 3.1982 | 3.0920 |
| 30 | 7.5625 | 5.3904 | 4.5097 | 4.0179 | 3.6990 | 3.4735 | 3.3045 | 3.1726 | 3.0665 |
| 40 | 7.3141 | 5.1785 | 4.3126 | 3.8283 | 3.5138 | 3.2910 | 3.1238 | 2.9930 | 2.8876 |
| 60 | 7.0771 | 4.9774 | 4.1259 | 3.6491 | 3.3389 | 3.1187 | 2.9530 | 2.8233 | 2.7185 |
| 120 | 6.8510 | 4.7865 | 3.9493 | 3.4796 | 3.1735 | 2.9559 | 2.7918 | 2.6629 | 2.5586 |
| $\infty$ | 6.6349 | 4.6052 | 3.7816 | 3.3192 | 3.0173 | 2.8020 | 2.6393 | 2.5113 | 2.4073 |

تابع: توزيع – ف

(Cont.)

F Distribution: 1 per cent Points

| $\nu_2$ \ $\nu_1$ | 10 | 12 | 15 | 20 | 24 | 30 | 40 | 60 | 120 | ∞ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 6055.8 | 6106.3 | 6157.3 | 6208.7 | 6234.6 | 6260.7 | 6286.8 | 6313.0 | 6339.4 | 6366.0 |
| 2 | 99.399 | 99.416 | 99.432 | 99.449 | 99.458 | 99.466 | 99.474 | 99.483 | 99.491 | 99.501 |
| 3 | 27.229 | 27.052 | 26.872 | 26.690 | 26.598 | 26.505 | 26.411 | 26.316 | 26.221 | 26.125 |
| 4 | 14.546 | 14.374 | 14.198 | 14.020 | 13.929 | 13.838 | 13.745 | 13.652 | 13.558 | 13.463 |
| 5 | 10.051 | 9.8883 | 9.7222 | 9.5527 | 9.4665 | 9.3793 | 9.2912 | 9.2020 | 9.1118 | 9.0204 |
| 6 | 7.8741 | 7.7183 | 7.5590 | 7.3958 | 7.3127 | 7.2285 | 7.1432 | 7.0568 | 6.9690 | 6.8801 |
| 7 | 6.6201 | 6.4691 | 6.3143 | 6.1554 | 6.0743 | 5.9921 | 5.9084 | 5.8236 | 5.7372 | 5.6495 |
| 8 | 5.8143 | 5.6668 | 5.5151 | 5.3591 | 5.2793 | 5.1981 | 5.1156 | 5.0316 | 4.9460 | 4.8588 |
| 9 | 5.2565 | 5.1114 | 4.9621 | 4.8080 | 4.7290 | 4.6486 | 4.5667 | 4.4831 | 4.3978 | 4.3105 |
| 10 | 4.8492 | 4.7059 | 4.5582 | 4.4054 | 4.3269 | 4.2469 | 4.1653 | 4.0819 | 3.9965 | 3.9090 |
| 11 | 4.5393 | 4.3974 | 4.2509 | 4.0990 | 4.0209 | 3.9411 | 3.8596 | 3.7761 | 3.6904 | 3.6025 |
| 12 | 4.2961 | 4.1553 | 4.0096 | 3.8584 | 3.7805 | 3.7008 | 3.6192 | 3.5355 | 3.4494 | 3.3608 |
| 13 | 4.1003 | 3.9603 | 3.8154 | 3.6646 | 3.5868 | 3.5070 | 3.4253 | 3.3413 | 3.2548 | 3.1654 |
| 14 | 3.9394 | 3.8001 | 3.6557 | 3.5052 | 3.4274 | 3.3476 | 3.2656 | 3.1813 | 3.0942 | 3.0040 |
| 15 | 3.8049 | 3.6662 | 3.5222 | 3.3719 | 3.2940 | 3.2141 | 3.1319 | 3.0471 | 2.9595 | 2.8684 |
| 16 | 3.6909 | 3.5527 | 3.4089 | 3.2588 | 3.1808 | 3.1007 | 3.0182 | 2.9330 | 2.8447 | 2.7528 |
| 17 | 3.5931 | 3.4552 | 3.3117 | 3.1615 | 3.0835 | 3.0032 | 2.9205 | 2.8348 | 2.7459 | 2.6530 |
| 18 | 3.5082 | 3.3706 | 3.2273 | 3.0771 | 2.9990 | 2.9185 | 2.8354 | 2.7493 | 2.6597 | 2.5660 |
| 19 | 3.4338 | 3.2965 | 3.1533 | 3.0031 | 2.9249 | 2.8422 | 2.7608 | 2.6742 | 2.5839 | 2.4893 |
| 20 | 3.3682 | 3.2311 | 3.0880 | 2.9377 | 2.8594 | 2.7785 | 2.6947 | 2.6077 | 2.5168 | 2.4212 |
| 21 | 3.3098 | 3.1729 | 3.0299 | 2.8796 | 2.8011 | 2.7200 | 2.6359 | 2.5484 | 2.4568 | 2.3603 |
| 22 | 3.2576 | 3.1209 | 2.9780 | 2.8274 | 2.7488 | 2.6675 | 2.5831 | 2.4951 | 2.4029 | 2.3055 |
| 23 | 3.2106 | 3.0740 | 2.9311 | 2.7805 | 2.7017 | 2.6202 | 2.5355 | 2.4471 | 2.3542 | 2.2559 |
| 24 | 3.1681 | 3.0316 | 2.8887 | 2.7380 | 2.6591 | 2.5773 | 2.4923 | 2.4035 | 2.3099 | 2.2107 |
| 25 | 3.1294 | 2.9931 | 2.8502 | 2.6993 | 2.6203 | 2.5383 | 2.4530 | 2.3637 | 2.2695 | 2.1694 |
| 26 | 3.0941 | 2.9579 | 2.8150 | 2.6640 | 2.5848 | 2.5026 | 2.4170 | 2.3273 | 2.2325 | 2.1315 |
| 27 | 3.0618 | 2.9256 | 2.7827 | 2.6316 | 2.5522 | 2.4699 | 2.3840 | 2.2938 | 2.1984 | 2.0965 |
| 28 | 3.0320 | 2.8959 | 2.7530 | 2.6017 | 2.5223 | 2.4397 | 2.3535 | 2.2629 | 2.1670 | 2.0642 |
| 29 | 3.0045 | 2.8685 | 2.7256 | 2.5742 | 2.4946 | 2.4118 | 2.3253 | 2.2344 | 2.1378 | 2.0342 |
| 30 | 2.9791 | 2.8431 | 2.7002 | 2.5487 | 2.4689 | 2.3860 | 2.2992 | 2.2079 | 2.1107 | 2.0062 |
| 40 | 2.8005 | 2.6648 | 2.5216 | 2.3689 | 2.2880 | 2.2034 | 2.1142 | 2.0194 | 1.9172 | 1.8047 |
| 60 | 2.6318 | 2.4961 | 2.3523 | 2.1978 | 2.1154 | 2.0285 | 1.9360 | 1.8363 | 1.7263 | 1.6006 |
| 120 | 2.4721 | 2.3363 | 2.1915 | 2.0346 | 1.9500 | 1.8600 | 1.7628 | 1.6557 | 1.5330 | 1.3805 |
| ∞ | 2.3209 | 2.1848 | 2.0385 | 1.8783 | 1.7908 | 1.6964 | 1.5923 | 1.4730 | 1.3246 | 1.0000 |